Poincaré, 1912-2012, Séminaire Poincaré XVI (2012) 211 – 244

Henri Poincaré et ses théorèmes d'uniformisation

François Béguin
LAGA
Institut Galilée
Université Paris Nord
99 avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse, France

Résumé. Ce texte évoque six « théorèmes d'uniformisation » découverts par Henri Poincaré : le premier alors que Poincaré n'avait que 26 ans et venait d'obtenir un poste de chargé de cours à Caen, le dernier un bon quart de siècle plus tard, alors qu'il était un scientifique couvert d'honneurs.

Ce texte est, pour une très large part, extrait du livre qu'Henri-Paul de Saint-Gervais a écrit sur l'uniformisation des surfaces de Riemann [St-Gervais2010].

1 Introduction

Si vous ouvrez un cours sur les surfaces de Riemann, vous trouverez certainement l'énoncé suivant du théorème d'uniformisation :

Toute surface de Riemann simplement connexe est biholomorphe à la sphère de Riemann, au plan complexe, ou au disque unité.

Pour comprendre l'histoire de la maturation du théorème d'uniformisation, des travaux de Niels Abel et Carl Gustav Jacobi sur les courbes elliptiques autour de 1830 aux preuves de Paul Koebe et Henri Poincaré en 1907, il convient d'oublier pour un temps cet énoncé moderne.

L'énoncé ci-dessus sous-entend que, pour comprendre toutes les surfaces de Riemann, il suffit de décrire celles qui sont simplement connexes. De fait, étant donnée une surface de Riemann S quelconque, on peut appliquer l'énoncé ci-dessus au revêtement universel de S (qui, par définition, est simplement connexe), et en déduire que S est biholomorphe à la sphère de Riemann, ou au quotient du plan complexe par un réseau de translations, ou au quotient du disque unité par un groupe discret d'isométries hyperboliques — un *groupe fuchsien* —. Mais, lorsque s'est posée la question de l'uniformisation au XIXème siècle, la notion de revêtement universel n'avait pas encore émergé, et la géométrie hyperbolique n'existait pas, ou n'était qu'une construction abstraite dont on doutait fort qu'elle puisse un jour être utile à quelque chose. L'invention du revêtement universel et celle des groupes fuchsiens sont deux parmi les révolutions qui ont permis de rêver à un énoncé aussi général que le théorème d'uniformisation que nous connaissons aujourd'hui.

L'énoncé ci-dessus présente le théorème d'uniformisation sous la forme d'un résultat de *classification* des surfaces de Riemann à un biholomorphisme près. Mais, au XIXème siècle, l'uniformisation n'était pas un problème de *classification* ; c'était un problème de *paramétrisation*. Une courbe (réelle ou complexe) peut être définie de deux manières différentes : de manière implicite par une équation $F(x, y) = 0$, ou de manière explicite par une paramétrisation $t \mapsto (x(t), y(t))$. Uniformiser les surfaces de Riemann, c'est passer d'une équation à une paramétrisation. Ainsi, l'énoncé moderne du théorème d'uniformisation nous dit que toute surface de Riemann peut être paramétrée par la sphère, le plan complexe, ou le disque unité. De plus, le paramétrage est « très sympathique » : c'est un biholomorphisme local et un revêtement (mais bien sûr, il n'est pas injectif si la surface de Riemann considérée n'est pas simplement connexe).

Enfin, l'énoncé ci-dessus porte sur des objets géométriques : les surfaces de Riemann. Au XIXème siècle, et en particulier lorsqu'il s'agissait d'uniformisation, les surfaces de Riemann était souvent pensées comme des outils, et non comme des objets géométriques abstraits intéressants en eux-mêmes. Les termes employés par David Hilbert dans son adresse au Congrès International des Mathématiciens de 1900 sont à cet égard révélateurs. Hilbert parle d'une relation entre deux variables, et non pas de la surface de Riemann qui est définie par cette relation :

> *« Comme Henri Poincaré fut le premier à le démontrer, il est toujours possible d'uniformiser une relation algébrique quelconque entre deux variables par le biais de fonctions automorphes d'une variable. C'est-à-dire, étant donnée une équation algébrique en deux variables, on peut toujours exprimer ces dernières comme des fonctions automorphes d'une troisième variable, de sorte que, après substitution, la relation algébrique soit identiquement satisfaite. Poincaré s'est également employé avec succès à la généralisation de ce théorème fondamental pour des relations qui ne sont plus algébriques mais analytiques quelconques [...] »*[1]

Lorsque Bernhard Riemann introduit les surfaces qui portent son nom, il ne cherche d'ailleurs pas à étudier des objets géométriques abstraits[2] ; les surfaces de Riemann qu'il considère sont celles définies par une équation algébrique, ou plus généralement, les surfaces associées à des *fonctions multiformes*. L'origine du problème de l'« uniformisation »n'est pas l'étude des surfaces de Riemann, mais l'existence de « fonctions multiformes »[3]. Amenés à calculer les primitives de fonctions rationnelles dans le domaine complexe, les mathématiciens de la première moitié du XIXème siècle (en particulier, Abel et Jacobi) avaient déjà été confrontés à des fonctions multiformes : la valeur de la primitive $f(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dw}{w}$ n'est pas unique ; elle dépend du chemin d'intégration. Bien vite, l'existence de phénomènes de multiformité pour les fonctions analytiques est apparu au grand jour. On sait qu'une fonction analytique est entièrement caractérisée par sa restriction à n'importe quel ouvert non-vide. Mais lorsque l'on cherche à étendre une fonction analytique initialement définie sur un petit ouvert U, l'objet que l'on construit n'est pas une fonction au sens moderne du terme, mais une « fonction multiforme ». Se débarasser (par des changements de variables) de ces phénomènes de multiformité est vite apparu comme un

[1] Il nous faut cependant remarquer que, dans ses notes, Poincaré emploie en général un langage un peu plus géométrique ; il énonce par exemple plusieurs fois le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann algébriques sous la forme suivante : *« Que les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une variable auxilaire »*.

[2] Même s'il n'hésite pas, quand cela lui est utile, à les traiter comme des surfaces topologioques abstraites, les découpant, et les recollant le long de courbes fermées.

[3] L'association de ces deux mots sonnent de nos jours comme un oxymore : une « fonction », au sens moderne de ce terme, ne peut être « multiforme »puisqu'à chaque point, elle associe *une seule* valeur. Cette association est cependant riche de sens, et l'oxymore qu'elle induit a au moins le mérite de souligner le problème posé par l'existence de tels objets.

problème crucial : c'est *stricto sensu* le but de *l'uniformisation*. Uniformiser, c'est (ou c'était) transformer les « fonctions multiformes » en fonctions uniformes. Voici l'énoncé d'uniformisation que Poincaré démontre en 1883, et qu'évoquait Hilbert dans la citation précédente :

> *« Soit y une fonction analytique quelconque d'une variable x, non uniforme. On peut toujours trouver une variable z telle que x et y soient fonctions uniformes de z. »*

Bien sûr, cet énoncé peut se traduire en termes purement géométrique en introduisant la surface de Riemann associée au germe de la fonction analytique y. Exprimer que x et y soient fonctions uniformes d'une variable auxiliaire z, c'est trouver un paramétrage (uniforme) de la surface de Riemann associé au germe de y par une variable auxiliaire z. C'est d'ailleurs par ce biais que Poincaré démontre le résultat annoncé. Il n'en reste pas moins que le but de l'article de Poincaré est d'établir un résultat sur les fonctions — cet article ne s'intitule-t-il pas *« Sur un théorème de la Théorie générale des fonctions »* ? —, et que les surfaces de Riemann n'y ont qu'un rôle ancillaire.

Le chemin qui amena Poincaré à l'uniformisation des surfaces de Riemann algébriques en 1881-82 est également significatif. Ce qui intéresse Poincaré au début de sa carrière, ce sont les équations différentielles. En 1881, un article de Lazarus Fuchs attire plus particulièrement son attention sur les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients méromorphes. Les solutions des ces équations sont naturellement multiformes (quand on fait le tour d'un pôle d'un des coefficients, la solution change de valeur). La grande découverte de Poincaré, celle qui le transporte de joie, c'est que l'on peut néanmoins exprimer ces solutions à l'aide de fonctions *uniformes* d'une variable auxilaire. Cette découverte lui permet aussi de montrer que toute surface de Riemann algébrique (de genre au moins égal à deux) est uniformisée par le disque... mais ce résultat époustouflant n'était pas son but initial ![4]

Poincaré est le personnage central de l'histoire du théorème d'uniformisation. En 1880, il réalise que la géométrie hyperbolique permet de construire des fonctions méromorphes avec des réseaux de périodes incroyablement riches, et comprend que ces fonctions peuvent jouer, pour les courbes algébriques de degré quelconque, le rôle que jouaient les fonctions elliptiques pour les cubiques non singulières. C'est cet éclair de génie qui rend possible un théorème d'uniformisation pour *toutes* les courbes algébriques. Avant les travaux de Poincaré, personne n'aurait osé croire à un résultat aussi général. L'honneur d'énoncer pour la première fois le théorème d'uniformisation pour les surfaces de Riemann algébriques reviendra certes à Félix Klein. Mais c'est certainement Poincaré qui le premier aura cru à un tel résultat, et c'est lui qui l'a rendu possible.

Fin 1882, Klein et Poincaré estiment tous les deux avoir — indépendamment l'un de l'autre, et en utilisant des arguments sensiblement différents — réussi à donner une forme convaincante à leurs démontrations du théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann algébriques. Épuisé physiquement et nerveusement, Klein tombe malade, avant de sombrer dans la dépression les deux années suivantes. Ce

[4] Et, même après coup, on sent bien que ce n'est pas ce qui lui importe le plus. Dans ces notes aux Comptes Rendus, ses mémoires, ou ses rapports d'activités, il annonce toujours en premier les résultats qu'il a obtenu concernant les équations différentielles. Et, à son ami Lecornu, il ne parle pas de surfaces de Riemann algébriques, mais déclare avec enthousiasme « Je sais résoudre toutes les équations différentielles ! ».

sera — de son propre aveu — la fin de sa période productive ; il a une carrière mathématique exceptionnelle derrière lui... mais n'a que 33 ans ! Poincaré, lui, galvanisé par le formidable exploit qu'il vient de réaliser, tente l'impossible : il part à la conquète des surfaces de Riemann non-algébriques ; il essaie d'uniformiser *toutes* les surfaces de Riemann. Et dès l'année suivante, il parvient à obtenir une forme affaiblie, mais complètement générale, du théorème d'uniformisation que nous connaissons maintenant. Son résultat revient — selon les mots de Hilbert — à uniformiser une relation analytique *quelconque* entre deux variables complexes.

Un quart de siècle plus tard, ce sera encore Poincaré qui, la même année que Paul Koebe, démontrera le « grand »théorème d'uniformisation, celui que nous connaissons maintenant sous ce nom. La preuve n'est certes pas aussi rigoureuse que celle de Koebe... mais les idées qui la guident sont lumineuses.

L'ambition de ce texte-ci est très modeste. Il ne s'agit en aucun cas de présenter l'histoire du théorème d'uniformisation. Il ne s'agit pas non plus de l'analyser —ni même de décrire — le rôle qu'a joué Poincaré dans la conquête de ce résultat fondamental. Tout au plus s'agit-il de commémorer le centenaire de la mort de Poincaré en évoquant quelques rendez-vous entre le grand homme et le théorème d'uniformisation. Plus précisément, j'évoquerai six *théorèmes d'uniformisations* démontrés par Poincaré au cours de sa carrière : d'abord l'uniformisation de la sphère privée d'un nombre fini de points réels, puis l'uniformisation des surfaces de Riemann algébriques modulo un nombre fini de points, puis la « vraie » uniformisation des surfaces de Riemann algébriques (*via* la méthode de continuité), puis l'uniformisation des fonctions analytiques, à nouveau l'uniformisation des surfaces algébriques mais cette fois-ci *via* la résolution de l'équation de Liouville, et enfin le « grand » théorème d'uniformisation que nous connaissons aujourd'hui. J'espère qu'au travers de ces six énoncés, et de quelques idées de preuve que j'en donnerai, on entreverra — une fois de plus — l'époustouflante puissance créative de Poincaré, et l'incroyable diversité des facettes de son génie.

Les pages qui suivent sont presque intégralement extraites d'un livre, composé à trente mains (dont les deux miennes) à l'occasion du centenaire du théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe, signé de l'aristocratique pseudonyme d'Henri-Paul de Saint-Gervais ([St-Gervais2010]). J'y ai pioché sans vergogne le matériel dont j'avais besoin ici. Je remercie mes quatorze co-auteurs de m'autoriser ce plagiat éhonté. J'espère qu'il incitera quelques lecteurs à ouvrir notre livre.

2 L'uniformisation à un nombre fini de points près

2.1 L'apparition de la géométrie hyperbolique

Poincaré a raconté, à la fin de sa vie, comment il a découvert les *fonctions fuchsiennes* ([Poincaré1908]).

Nous sommes en 1880. Un article de Fuchs ([Fuchs1866]) a attiré l'attention de Poincaré sur les équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients méromorphes. Les solutions d'une telle équation sont des fonctions multiformes (quand on revient au même point après avoir fait le tour d'un pôle d'un des coefficients, la valeur de la solution a changé). Pour comprendre le comportement d'une base (v_1, v_2) de solutions, il suffit d'étudier le quotient $w = v_1/v_2$ (qui est bien sûr lui aussi une fonction multiforme). Guidé par l'analogie avec les fonctions elliptiques, on essaie alors de considérer « l'inverse » de w : si w avait le bon goût d'être injective, son inverse w^{-1} serait alors une « vraie » fonction (*i.e.* une fonction uniforme), et la multiformité de w se traduirait par une périodicité de w^{-1}. Hélas, hormis dans certaines situations triviales, w semble devoir être « sauvagement multiforme », si bien que son inverse w^{-1} (si tant est qu'il existe) devrait admettre un « réseau de périodes » invraisemblablement complexe.

Poincaré est d'abord persuadé que des fonctions méromorphes avec des réseaux de périodes aussi riches ne peuvent pas exister. Mais quelques jours plus tard, au cours d'une nuit d'insomnie, il réussit à construire les premiers exemples de telles fonctions, qu'il appellera désormais *fonctions fuchsiennes*.

Une course géologique organisée par l'École des Mines l'éloigne alors de Caen et de ses travaux mathématiques. C'est pourtant au cours de ce voyage, au moment précis où il met le pied sur le marchepied d'un omnibus, que *« l'idée [lui] vint, sans que rien dans [ses] pensées antérieures parût [l']y avoir préparé, que les transformations dont [il a] fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. »*. En d'autres termes, Poincaré réalise soudain que les fonctions fuchsiennes qu'il a construites sont des fonctions méromorphes sur le disque unité qui sont invariantes par un groupe discret d'isométries de la métrique hyperbolique du disque.

Cette « illumination », qui révèle à Poincaré l'existence d'un lien entre l'uniformisation de certaines fonctions multiformes (et, par suite, certaines surfaces de Riemann) et la géométrie hyperbolique, ouvre le chemin vers le théorème d'uniformisation. Bien sûr, il ne s'agit à ce stade que de l'uniformisation de fonctions très particulières (les quotients de solutions d'équations différentielles très spéciales). Mais Poincaré dispose maintenant d'un outil géométrique pour construire « de nouvelles transcendantes » avec des propriétés étonnantes, et qui seront les candidates naturelles à être des uniformisantes.

Dès lors, Poincaré a un programme de travail en trois points :

1. construire des groupes discrets d'isométries du disque hyperbolique (que Poincaré appellera *groupes fuchsiens*) ; si possible comprendre l'espace de tous ces groupes ;
2. pour chaque groupe fuchsien Γ, construire des fonctions fuchsiennes associées à Γ, *i.e.* des fonctions méromorphes sur le disque unité invariantes par tous les éléments de Γ ; si possible, comprendre l'espace de ces fonctions fuchsiennes associées à Γ ;
3. enfin, montrer que les fonctions fuchsiennes ainsi construites permettent de résoudre beaucoup d'équations différentielles (toutes les équations différentielles linéaires ?), et donc d'uniformiser beaucoup de surfaces de Riemann.[5]

2.2 Constructions de fonctions fuchsiennes

Rappelons que la sphère de Riemann est la surface de Riemann (homéomorphe à la sphère) obtenue en « adjoignant un point à l'infini » au plan complexe ; nous

[5] Bien que ce fût la motivation principale de Poincaré, nous délaisserons ici l'aspect « résolution d'équations différentielles » pour nous concentrer sur les résultats d'uniformisation.

la noterons $\widehat{\mathbb{C}}$. Rappelons que les biholomorphismes de la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ sont les homographies à coefficients complexes, c'est-à-dire les transformations du type $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ et $ad-bc \neq 0$. Le groupe de ces biholomorphismes est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Il se trouve que les biholomorphismes de $\widehat{\mathbb{C}}$ qui laissent invariant le disque unité $\mathbb{D}$ sont exactement les isométries du disque $\mathbb{D}$ muni de sa métrique hyperbolique (dit *disque de Poincaré*). Le groupe de ces isométries est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Définition 1. Un *groupe fuchsien* est un sous-groupe discret du groupe des isométries du disque $\mathbb{D}$ muni de sa métrique hyperbolique.

Oublions pour l'instant la construction de groupes fuchsiens, et expliquons comment Poincaré construit des fonctions fuchsiennes associées à un groupe donné. Soit Γ un groupe fuchsien.

Définition 2. Une fonction fuchsienne associée à Γ est une fonction méromorphe $g : \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$ qui est Γ-invariante : $g \circ \varphi(z) = g(z)$ pour tout $\varphi \in \Gamma$.

Bien entendu, étant donnée une fonction méromorphe g sur le disque $\mathbb{D}$, on peut essayer naïvement de construire une fonction Γ-invariante en considérant la série

$$\sum_{\varphi \in \Gamma} g \circ \varphi(z).$$

On voit bien, hélas, que cette série n'est pas convergente (sauf dans des cas triviaux). Pour contourner ce problème, Poincaré se laisse guider par l'analogie des fonctions elliptiques. Il commence par chercher des fonctions qui ne sont pas réellement Γ-invariantes, mais plutôt « Γ-quasi-invariantes ».

Définition 3. Une *forme automorphe (méromorphe) de poids* ν associée au groupe fuchsien Γ est une fonction méromorphe g sur le disque $\mathbb{D}$ telle que

$$g \circ \varphi(z) \cdot (\varphi'(z))^{\nu} = g(z)$$

pour tout $\varphi \in \Gamma$

Il montre (voir [Poincaré1881a, Poincaré1882b] ou [St-Gervais2010, chapitre VI]) :

Théorème 4 (Poincaré, 1881)**.** *Soit g une fonction méromorphe sur la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ n'ayant pas de pôle sur le bord du disque unité $\mathbb{D}$. Alors, pour tout $\nu \geq 2$, la série*

$$\theta(z) := \sum_{\varphi \in \Gamma} f \circ \varphi(z) \cdot (\varphi'(z))^{\nu} \tag{1}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$. La somme de cette série est une forme automorphe méromorphe de poids ν associée au groupe Γ.

Il ne reste alors plus qu'à remarquer que le quotient de deux formes automorphes méromorphes de même poids est une fonction méromorphe Γ-invariante, c'est-à-dire une fonction fuchsienne associée au groupe Γ. Pour peu que l'on ait choisi des formes automorphes qui n'ont pas les mêmes pôles, la fonction fuchsienne ainsi construite n'est pas constante. Ainsi, *pour tout groupe fuchsien* Γ*, on peut construire des fonctions fuchsiennes (non-constantes) associées à* Γ*.*

Poincaré va plus loin ([Poincaré1882b, §4]) : il identifie l'espace des fonctions fuchsiennes associées au groupe fuchsien Γ. Dans la suite, Γ est supposé finiment engendré, et tel que l'aire hyperbolique du quotient $\Gamma \setminus \mathbb{D}$ soit finie (ce qui équivaut à dire que l'orbite $\Gamma.x$ d'un point $x \in \mathbb{D}$ sous l'action de Γ adhère à tout point du cercle unité). Poincaré remarque que deux fonctions fuchsiennes quelconques associées au groupe fuchsien Γ sont liées par une relation algébrique. En effet, soient $z \mapsto x(z)$ et $z \mapsto y(z)$ deux fonctions fuchsiennes associées à Γ. L'inverse de x est bien sûr multiforme. Les hypothèses sur Γ l'empêche cependant d'être « trop multiforme » : elle n'a qu'un nombre fini de déterminations locales. Si l'on note $z_1(x), \dots, z_d(x)$ ces déterminations locales, alors toute fonction symétrique de $y(z_1(x)), \dots, y(z_i(x))$ est une « vraie » fonction méromorphe sur la sphère de Riemann, donc une fonction rationnelle en x. L'équation

$$y^d - \sigma_1(x)y^{d-1} + \cdots + (-1)^d \sigma_d(x) = 0,$$

où $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ sont les fonctions symétriques élémentaires des quantités $y(z_1(x)), \dots, y(z_i(x))$, est donc une relation algébrique entre x et y. Via le théorème de l'élément primitif, Poincaré en déduit ([Poincaré1884]) :

> « *Toutes ces fonctions* [les fonctions fuchsiennes associées à Γ] *s'exprimeront rationnellement à partir de deux d'entre elles que j'appellerai* x *et* y*. Nous aurons d'ailleurs entre* x *et* y *une relation algébrique* $\varphi(x, y) = 0$*.* »

Puis Poincaré en déduit que le quotient $\Gamma \setminus \mathbb{D}$ s'identifie[6] à la courbe algébrique d'équation $\varphi(x, y) = 0$, via l'application $z \mapsto (x(z), y(z))$.

2.3 L'uniformisation de la sphère privée d'un nombre fini de points réels

Dans une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences datée du 18 mai 1881 ([Poincaré1881c]), Poincaré annonce qu'il sait montrer le théorème suivant[7] :

Premier théorème d'uniformisation (Uniformisation de la sphère privée de points réels. Poincaré, 1881)**.** *Pour* $n \geq 3$*, si* $p_1, \dots, p_n$ *des points situés sur l'axe réel, la sphère de Riemann privée de* $p_1, \dots, p_n$ *est uniformisée par le disque unité.*[8]

Poincaré esquisse la preuve de ce résultat dans une note qu'il envoie à l'académie quelques semaines plus tard ([Poincaré1881d]). Il la détaillera dans [Poincaré1884]. Je vais en faire ici la preuve pour $n = 3$; le cas général découle des mêmes arguments (et d'une récurrence sur n).

Nous devons montrer que la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ privée de quatre points réels quelconques est uniformisée par le disque. En composant par un automorphisme de

[6] Poincaré semble là peu à l'aise et ne s'étend guère. De fait, le quotient $\Gamma \setminus \mathbb{D}$ est biholormophe à la surface de Riemann sous-jacente à la courbe algébrique d'équation $\varphi(x, y) = 0$, c'est-à-dire à la courbe obtenue en désingularisant et compactifiant $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid \varphi(x, y) = 0\}$. Poincaré traite par contre avec beaucoup de soin le cas particulier où $\Gamma \setminus \mathbb{D}$ est de genre nul dans la partie suivante de son mémoire [Poincaré1882b, §5].

[7] J'effectue ici un travail de traduction important ; Poincaré exprime, comme à son habitude, son résultat en termes d'équations différentielles linéaires, et de fonction zêtafuchsiennes :

> « *En introduisant les fonctions zétafuchsiennes qui correspondent à ces fonctions* $f(z)$*, on intègre toutes les équations linéaires à coefficients rationnels dont tous les points singuliers sont réels* ».

[8] Autrement dit, $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ est biholomorphe au quotient du disque unité par un groupe fuchsien.

la sphère $\widehat{\mathbb{C}}$, on peut envoyer trois des quatres points sur $0, 1, \infty$, et le quatrième dans l'intervalle réel $]0, 1[$. On est donc ramené à montrer que, pour tout z dans l'intervalle réel $]0, 1[$, il existe un groupe fuchsien Γ tel que le quotient du $\Gamma \setminus \mathbb{D}$ est biholomorphe à $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, z, 1, \infty\}$.

Pour montrer cela, il nous faut construire des groupes fuchsiens. Rappelons que les géodésiques de la métrique hyperbolique du disque unité sont les arcs de cercles orthogonaux au bord de ce disque. Considérons alors six points distincts $s_1, \ldots, s_6$ sur le bord du disque (numérotés de sorte que l'on les rencontre dans cet ordre lorsque l'on parcourt le bord du disque dans le sens direct). Notons H l'hexagone hyperbolique de sommets $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ (c'est un hexagone « écorné » : les sommets sont sur le bord du disque ; ils ne font donc pas partie de l'hexagone). Il existe une unique isométrie ϕ_2 qui envoie la géodésique $]s_2, s_3[$ sur la géodésique $]s_2, s_1[$, une unique isométrie ϕ_4 qui envoie la géodésique $]s_4, s_5[$ sur la géodésique $]s_4, s_3[$, et une unique isométrie ϕ_6 qui envoie la géodésique $]s_6, s_1[$ sur la géodésique $]s_6, s_5[$ (figure 1). Soit Γ le groupe d'isométries engendré par ϕ_2, ϕ_4, ϕ_6. Il n'est pas bien difficile de voir que Γ est un groupe fuchsien, et que le quotient du disque par Γ n'est autre que la surface de Riemann, obtenue en considérant l'hexagone H et en identifiant ses côtés deux-à-deux ($]s_2, s_3[$ avec $]s_2, s_1[$, $]s_4, s_5[$ avec $]s_4, s_3[$, et $]s_6, s_1[$ avec $]s_6, s_5[$). Cette surface de Riemann est donc topologiquement une sphère privée de quatre points (voir figure 1). Schwarz avait démontré dès 1870 qu'il n'existe (à biholomorphisme près) qu'une seule surface de Riemann homéomorphe à la sphère : la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. Par ailleurs, il existe toujours un automorphisme de $\widehat{\mathbb{C}}$ qui envoie trois points donnés sur $0, 1, \infty$. On conclut donc que le quotient $\Gamma \setminus \mathbb{D}$ est biholomorphe à $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty, z\}$ pour un certain point z.

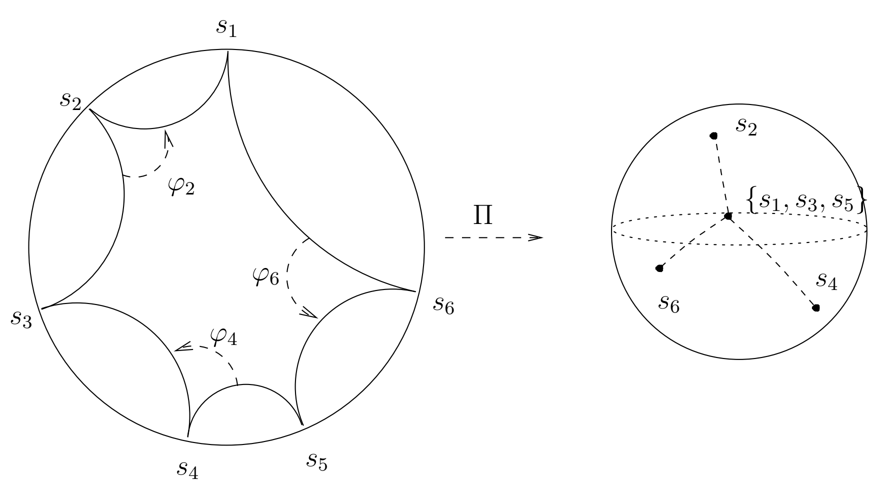

FIG. 1 – Uniformisation de la sphère privée de 4 points.

Considérons maintenant le cas particulier où l'hexagone H est symétrique par rapport à $]s_2, s_5[$. Quitte à transporter la situation par une isométrie du disque, on peut supposer que $s_2 = 1$, $s_4 = i$ et $s_5 = -1$. On a alors $s_3 = e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in]0, \pi/2[$. Et comme H est supposé symétrique par rapport à $]s_2, s_5[$ (qui est maintenant l'axe réel puisque $s_2 = 1$ et $s_5 = -1$), on a $s_6 = \overline{s_4} = -i$ et $s_1 = \overline{s_3} = e^{-i\theta}$. L'hexagone H, le groupe Γ et le point z ne dépendent donc plus que du paramètre $\theta \in]0, \pi/2[$; on les notera dorénavant H_θ, Γ_θ, z_θ. L'hexagone H_θ est invariant par la conjugaison complexe ; la surface $\Gamma_\theta \setminus \mathbb{D} \simeq \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty, z_\theta\}$ admet donc une involution anti-holomorphe ; le point z_θ doit donc être sur l'axe réel. On peut supposer que z_θ est dans l'intervalle réel $]0, 1[$. Il reste donc à montrer que, lorsque θ varie entre 0 et $\pi/2$, le point z_θ parcourt l'intervalle réel $]0, 1[$ en entier.

Tout d'abord, on vérifie que z_θ dépend continûment de θ. C'est intuitivement clair. Une manière de le montrer (celle qu'utilise Poincaré) consiste à dire que les isométries ϕ_2, ϕ_4, ϕ_6 que nous avons utilisées pour engendrer le groupe Γ_θ dépendent évidemment continûment de θ. Par suite, si l'on fixe une fonction méromorphe f, la forme automorphe donnée par la formule (1) dépendra continûment de θ. Le quotient de deux telles formes automorphes (associées à des fonctions f_1, f_2) sera une fonction fuchsienne qui dépendra continûment de θ. Puisque le quotient $\Gamma_\theta \setminus \mathbb{D} \simeq \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty, z_\theta\}$ s'identifie à la courbe algébrique définie par la relation entre deux fonctions fuchsiennes, il suit que le point z_θ dépendra continûment de θ.

Puis on vérifie que le point z_θ tend vers le point 0 (resp. 1) lorsque θ tend vers 0 (resp. $\pi/2$). La preuve est essentiellement la même que celle du point précédent. Lorsque θ tend vers 0, l'hexagone H_θ est de plus en plus proche du quadrilatère de sommets $1, i, -1, -i$. Il suit que, si l'on fixe une fonction f, la forme automorphe donnée par la formule (1) converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ vers la forme automorphe donnée par la formule similaire pour le groupe Γ_0 engendré par deux isométries qui identifient par paire les côtés du quadrilatère de sommets $1, i, -1, -i$. Par suite, la fonction fuchsienne obtenue en prenant le quotient de deux telles formes automorphes tend vers la fonction fuchsienne construite de la même manière, mais associée au groupe Γ_0. On en déduit enfin que z_θ tend vers 0 lorsque θ tend vers 0, et ceci termine la preuve (au moins dans le cas $n = 4$).

La preuve ci-dessus, dans laquelle Poincaré déforme continûment les groupes fuchsiens afin d'atteindre toutes les surfaces que l'on veut uniformiser, préfigure ce que Klein et Poincaré nommeront bientôt la *méthode de continuité*.

2.4 L'uniformisation des surfaces modulo un nombre fini de points

Dans sa note aux Comptes Rendus du 8 août 1881 ([Poincaré1881e]), Poincaré écrit sans trembler :

« *On en conclut*

1. *que toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques s'intègre par les fonctions zêtafuchsiennes ;*
2. *que les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une variable auxiliaire.* »

Autrement dit, il annonce *qu'il sait uniformiser toutes les courbes algébriques* !

En fait, il exagère. Voici ce que démontre vraiment Poincaré dans sa note :

Deuxième théorème d'uniformisation (Uniformisation à un nombre fini de points près. Poincaré, 1881)**.** *Pour toute surface de Riemann algébrique S, on peut trouver des points $p_1, \ldots, p_n \in S$, tels que $S \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ est uniformisée par le disque.*[9]

[9]Autrement dit, tels que $S \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ est biholomorphe au quotient du disque par un groupe fuchsien.

Poincaré ne sait donc uniformiser les courbes algébriques *qu'à un nombre fini de points près*. Ce n'est pas si mal. C'est même un résultat très impressionnant de par sa généralité : Poincaré sait traiter *toutes les courbes algébriques*. Ce résultat n'est pourtant qu'un corollaire très simple de son « premier théorème d'uniformisation » (voir le paragraphe précédent). Poincaré en donne d'ailleurs une preuve complète et soigneusement détaillée[10] dans sa note qui ne comporte que trois pages manuscrites.

Considérons donc une surface de Riemann algébrique S. Soit $f : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ une fonction méromorphe, donc rationnelle, sur S (on peut par exemple considérer une équation $\varphi(x,y)=0$ de S ; la coordonnée x définit alors une fonction rationnelle sur S). Soit $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ l'ensemble des valeurs critiques de f. Si E est formé de points réels, le théorème est démontré. Il suffit en effet de relever (via f) l'uniformisation de la sphère $\widehat{\mathbb{C}} - E$ (obtenue par le théorème 2.3), pour obtenir une uniformisation de S privée de l'ensemble fini $f^{-1}(E)$. Si, comme il faut s'y attendre, E n'est pas formé de points réels, Poincaré compose f avec un polynôme bien choisi P : autrement dit, il remplace f par $P \circ f$. L'ensemble des valeurs critiques de $P \circ f$ est l'union de $P(E)$ et des valeurs critiques de P. Pour obtenir le théorème, il suffit donc que Poincaré démontre alors le joli lemme suivant :

Lemme 5. *Si E est une partie finie de $\widehat{\mathbb{C}}$, il existe un polynôme P tel que $P(E)$ est contenu dans la droite réelle et dont les valeurs critiques sont réelles.*

La preuve de ce lemme est un petit exercice que je laisse au lecteur..., à moins que celui-ci ne préfère la lire dans [Poincaré1881e].

3 La méthode de continuité et l'uniformisation des courbes algébriques

Le 11 juin 1881, Klein prend connaissance des premières notes de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes ([Poincaré1881a, Poincaré1881b, Poincaré1881c]). Il est quelque peu choqué par l'ignorance que Poincaré a manifestement de la littérature en général, et de ses propres travaux en particulier. À n'en pas douter, il est aussi très impressionné par les résultats que Poincaré a déjà obtenus. Dès le lendemain, il écrit à Poincaré pour le « sermonner ». Le but de sa lettre est aussi — n'en doutons pas — de prendre contact avec un jeune mathématicien qui vient de faire une entrée fracassante dans un sujet qui l'intéresse au plus haut point. C'est la première des vingt-six lettres que Poincaré et Klein s'échangeront en un peu plus d'un an, et dans lesquelles ils parleront groupes fuchsiens, fonctions fuchsiennes et uniformisations.

Poincaré a appris à construire beaucoup de groupes fuchsiens. Le sujet principal[11] des premières lettres qu'échangent Klein et Poincaré est le décompte du nombre de paramètres dont dépend un groupe fuchsien Γ tel que le quotient $\Gamma \setminus \mathbb{D}$ soit une surface de genre g. Il résulte de l'échange de lettres qu'un tel groupe fuchsien dépend (à conjugaison près) de $6g-6$ paramètres réels. Par ailleurs, Riemann avait montré qu'une courbe algébrique de genre g dépend (à équivalence birationnelle près) de

[10]une fois n'est pas coutume...

[11]Outre une querelle portant sur l'hommage que Poincaré a fait à Fuchs en inventant les termes *groupes fuchsiens* et *fonctions fuchsiennes*. Klein estime que Fuchs ne mérite en rien cet honneur, et n'hésite pas à faire lourdement pression pour que Poincaré oublie cette terminologie, et parle désormais de fonctions schwarziennes... ou kleinéennes.

$3g-3$ paramètres près). Autrement dit, la dimension de l'espace des surfaces de Riemann de genre g uniformisées par le disque[12] coïncide avec la dimension de l'espace des courbes algébriques de genre g. Klein et Poincaré sont alors tous deux persuadés que toutes les surfaces de Riemann algébriques de caractéristique d'Euler négative sont uniformisables par le disque. L'un comme l'autre annonceront le résultat dès 1882, repoussant les preuves à plus tard :

Troisième théorème d'uniformisation (Uniformisation des surfaces de Riemann algébriques. Klein, Poincaré, 1882)**.** *Toute surface de Riemann algébrique de caractéristique d'Euler négative est uniformisée par le disque unité.*[13]

Les arguments qu'envisagent Poincaré et Klein pour montrer ce résultat sont de nature assez différentes (Poincaré continue par exemple à penser en termes d'équations différentielles, ce qui n'est pas le cas de Klein). Les preuves qu'ils s'affairent à mettre au point utilisent cependant la même stratégie globale, que Klein et Poincaré appellent *méthode de continuité*. Cette méthode consiste à montrer que, dans l'espace des (modules de) surfaces de Riemann d'un type topologique fixé, le sous-ensemble constitué des (classes de) surfaces de Riemann uniformisables est d'une part ouvert, et d'autre part fermé. Ceci suffirait en effet à montrer le théorème ci-dessus puisque, d'une part Poincaré et Klein semblent considérer évident que l'espace des modules considéré est connexe, et d'autre part l'ensemble des surfaces uniformisables est clairement non-vide.

Il faut bien avouer que les « preuves » que Klein et Poincaré finiront par donner du théorème ci-dessus ne sont guère convaincantes (à tout le moins, elles n'ont guère convaincu H.-P. de Saint-Gervais malgré la bonne volonté de ce dernier). Vers la fin de sa vie, Klein écrira d'ailleurs que ni lui, ni Poincaré n'avaient obtenu de preuve complète ([Klein1921a, vol.3, pages 577-586]). Tout au plus doit-on — de l'avis d'H.-P. de Saint-Gervais — créditer Poincaré d'une « quasi-preuve » de l'ouverture de l'ensemble des surfaces uniformisables.

3.1 L'ensemble de surfaces uniformisables est ouvert

Étant donnée une surface de Riemann S et une coordonnée holomorphe locale x définie sur un ouvert U de S, Poincaré considère des équations différentielles linéaires d'ordre 2 sur U qui s'écrivent sous la forme :

$$\frac{d^2v}{dx^2}+hv=0$$

où h est une fonction holomorphe de x. Les solutions d'une telle équation forment bien sûr un espace vectoriel de dimension 2 ; de plus, si (v_1,v_2) est une base de solutions de cette équation, alors on peut retrouver v_1 et v_2 à partir de leur quotient $w=v_1/v_2$. Dès lors, on s'intéressera à un tel quotient plutôt qu'aux solutions elles-mêmes. Poincaré ne s'intéresse qu'aux équations *normales* ; ce sont les équations qui ont la forme ci-dessus sur l'ouvert U et telles que le quotient w de deux solutions se prolonge en une fonction méromorphe multiforme globalement définie

[12]Évidemment, le terme « dimension »est un peu prématuré ici puisque ni Poincaré, ni Klein ne montrent vraiment que l'espace en question est une variété.

[13]Autrement dit, est biholomorphe au quotient du disque par un groupe fuchsien.

sur la surface S (voir [St-Gervais2010, partie VIII.3] pour une définition plus formelle, et [St-Gervais2010, partie IX.1] pour la caractérisation, due à Fuchs, de ces équations).

Soit S une surface de Riemann, et (E) une équation normale sur S. Soient v_1, v_2 deux solutions indépendantes de E et $w = v_1/v_2$ le quotient de ces solutions. Bien sûr, v_1, v_2, w ne sont pas de « vraies » fonctions sur S ; ce sont des fonctions multiformes ; autrement dit, elles définissent de « vraies » fonctions $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{w}$ sur le revêtement universel $\widetilde{S}$ de S. Bien sûr, $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{w}$ ne sont pas des fonctions arbitraires. En particulier, puisque l'espace des solutions — mêmes locales — de (E) est de dimension 2, deux déterminations locales de la base (v_1, v_2) sont images l'une de l'autre par une transformation linéaire. Il suit que deux déterminations locales de w sont images l'une de l'autre par une homographie (*i.e.* une transformation du type $w \mapsto \frac{aw+b}{cw+d}$). De manière équivalente, il existe une repésentation ρ du groupe fondamental $\pi_1(S)$ dans le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ des homographies, telle que la fonction $\widetilde{w} : \widetilde{S} \to \widehat{\mathbb{C}}$ satisfait la relation d'équivariance :

$$\widetilde{w}(\gamma.\widetilde{x}) = \rho(\gamma).\widetilde{w}(\tilde{x})$$

pour tout $\gamma \in \pi_1(S)$. C'est la *représentation de monodromie* de l'équation (E). À conjugaison près, elle ne dépend pas du choix de w.

Si, par chance, la fonction $\widetilde{w} : \widetilde{S} \to \widehat{\mathbb{C}}$ arrive dans le disque unité $\mathbb{D}$ et définit un biholomorphisme global de $\widetilde{S}$ sur $\mathbb{D}$, alors :

1. l'inverse de $\widetilde{w}$ uniformise (le revêtement universel de) la surface de Riemann S ;
2. l'image de la représentation de monodromie ρ est contenu dans le sous-groupe des homographies qui préservent $\mathbb{D}$ (que l'on identifiera dans la suite à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$) ; c'est même un groupe fuchsien.

Dans cette situation idéale, Poincaré dit que l'équation normale (E) est *fuchsienne.*

On peut par ailleurs montrer que, si $\widetilde{w}$ est un biholomorphisme de $\widetilde{S}$ dans $\mathbb{D}$, alors il existe une équation normale (E) sur S (qui est automatiquement fuchsienne), tel que $\widetilde{w}$ est le quotient de deux solutions de (E). Dès lors, le problème de l'uniformisation des surfaces de Riemann se traduit sous la forme suivante : *existe-t-il, sur chaque surface de Riemann, une équation fuchsienne ?* Jusqu'en 1883, c'est toujours en ces termes que Poincaré pense et présente le problème de l'uniformisation.

On fixe maintenant un entier $g \geq 2$ et l'on se restreint aux surfaces de Riemann compactes de genre g. Suivant le principe de la méthode de continuité, Poincaré s'efforce de montrer que l'ensemble des surfaces de Riemann qui portent une équation fuchsienne est ouvert (dans l'espace des modules des surfaces de Riemann compactes de genre g)[14]. Pour ce faire, Poincaré n'hésite pas à considérer :

1. pour chaque surface de Riemann S (ou plutôt : pour chaque classe de surface de Riemann modulo biholomorphisme), l'espace $\mathcal{E}(S)$ de toutes les équations normales sur S ; c'est un espace affine ;
2. le fibré $\mathcal{E}_g$ dont la base est l'espace des modules des surfaces de Riemann compactes de genre g, et dont la fibre au-dessus (de la classe) d'une surface S est l'espace affine $\mathcal{E}(S)$;

[14] Poincaré prétend également démontrer que cet ensemble est fermé, mais, comme je l'ai déjà dit, H.-P. de Saint-Gervais n'a pas réussi à comprendre sa « preuve ».

3. l'espace $\mathcal{R}_g^{\mathbb{C}}$ des représentations du groupe foncdamental d'une surface de genre g dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ modulo conjugaison.

On a une application de monodromie Mon : $\mathcal{E}_g \to \mathcal{R}_g^{\mathbb{C}}$ qui à chaque équation normale (E) sur une surface de Riemann S associe la représentation de monodromie de (E). Dans $\mathcal{R}_g^{\mathbb{C}}$, on a une sous-variété réelle $\mathcal{R}_g^{\mathbb{R}}$ constituée des classes de conjugaison de représentations à valeurs de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Soit S_0 une surface de Riemann (compacte de genre g) uniformisable. Alors il existe un biholomorphisme $\widetilde{w} : \widetilde{S} \to \mathbb{D}$, et ce biholomorphisme est le quotient de deux solutions d'une équation fuchsienne (E_0). On veut montrer que toute surface de Riemann S assez proche de S_0 est uniformisable, c'est-à-dire admet une équation fuchsienne (E_S). En fait, on voit facilement qu'il suffit de montrer que toute surface de Riemann S assez proche de S_0 admet une équation normale (E_S) dont la monodromie est à valeur dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Cela va résulter du lemme suivant :

Lemme 6. *L'application de monodromie* Mon : $\mathcal{E}(S_0) \to \mathcal{R}_g^{\mathbb{C}}$ *est transverse à la sous-variété* $\mathcal{R}_g^{\mathbb{R}}$ *au point* (E_0)*.*

Ce lemme est exactement ce qu'il faut pour assurer que la pré-image par l'application Mon de la sous-variété $\mathcal{R}_g^{\mathbb{R}}$ contient un germe de sous-variété passant par (E_0) et transverse à $\mathcal{E}(S_0)$. Ce germe rencontre donc la fibre $\mathcal{E}(S)$ pour toute surface S suffisamment proche de S_0. Autrement dit, toute surface S assez proche de S_0 admet une équation normale dont la monodromie est une représentation à valeurs dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Nous avons vu que cela suffit à montrer que toute surface S assez proche de S_0 est uniformisée par le disque. L'ensemble des surfaces de Riemann (compactes de genre g) uniformisées par le disque est donc ouvert.

Pour une preuve plus détaillée, je renvoie à [St-Gervais2010, chapitre VI].

C'est vrai, Poincaré ne montre pas que les espaces qu'il considère sont des variétés ou des fibrés, et il ne montre pas le lemme 6. Il ne dispose pas du langage nécessaire pour le faire ; les concepts de fibrés, de transversalité, *etc.*, n'ont pas encore été dégagés. Mais « il sait que tout cela est vrai ». Voici par exemple les deux lignes du mémoire de Poincaré qui correspondent à l'énoncé du lemme 6 :

> *« Est-ce parce que le déterminant fonctionnel des coordonnées de μ par rapport à celles de δ s'annulerait ?* [15] *Mais cela n'arrivera jamais puisque le lemme du paragraphe VII montre qu'à tout point μ ne peut correspondre qu'un point δ.*[16] *»*

Et quel vertige de voir ainsi Poincaré inventer et manipuler avec une assurance et une virtuosité époustouflante ce que l'on appellera (beaucoup) plus tard des *structures projectives*, l'*espace modulaire*, le *fibré cotangent à l'espace modulaire*, *etc.* !

4 L'uniformisation des fonctions

En 1882, Klein et Poincaré considèrent avoir démontré le théorème d'uniformisation pour les surfaces algébriques. Ce résultat exceptionnel marque plus ou

[15] La non-nullité de ce déterminant est exactement la condition de transversalité.

[16] Ce n'est bien sûr pas un argument suffisant...

moins la fin de la période productive de Klein, dont la santé se dégrade à compter de l'automne 1882, et qui sombrera dans la dépression les deux années suivantes ([Rowe1989]). Poincaré lui, voit déjà plus loin : il veut uniformiser *toutes* les surfaces de Riemann ! Et, moins d'un an après, il y arrive « presque » !

De nos jours, le théorème d'uniformisation est vu comme un résultat de classification des surfaces de Riemann. Comme je l'ai déjà dit, ce n'est pas en ces termes que se posait le problème au XIXème siècle. D'une part, l'objectif de l'uniformisation était de montrer que les surfaces de Riemann pouvait être vues comme des courbes paramétrées (autrement dit, de paramétrer chaque surface de Riemann par une fonction uniforme). D'autre part, les surfaces de Riemann n'étaient souvent vues que comme des outils, le projet initial étant de comprendre les fonctions multiformes (en particulier chez Poincaré, dont l'intérêt primordial est de comprendre les fonctions multiformes qui apparaissent comme solutions des équations différentielles linéaires). L'article que Poincaré publie en 1883 au Bulletin de la Société Mathématique de France s'ouvre sur l'énoncé suivant :

Quatrième théorème d'uniformisation (Uniformisation des fonctions, énoncé original. Poincaré, 1883)**.** *Soit y une fonction analytique quelconque d'une variable x, non uniforme. On peut toujours trouver une variable z telle que x et y soient fonctions uniformes de z.*

Pour préciser le résultat que Poincaré obtient, il me faut le traduire en termes plus géométriques. Considérons un germe de fonction holomorphe y d'une variable x. En général, quand on cherche à prolonger y, on obtient une « fonction multiforme » de la variable x. On peut cependant construire une surface de Riemann abstraite maximale sur laquelle y est définie en tant que fonction holomorphe uniforme : *la surface de Riemann associé au germe y*. Informellement, cette surface est le revêtement (ramifié) du plan des x, dont les feuillets locaux sont en bijection avec différentes déterminations locales du prolongement du germe y (voir par exemple [St-Gervais2010, encadré II.1] pour une définition plus formelle). Trouver une variable z telle que x et y soient fonctions uniformes de z revient alors à uniformiser la surface de Riemann associée au germe y, c'est-à-dire à paramétrer cette surface avec une seule variable complexe z. En 1883, Poincaré ne parvient pas à obtenir un paramétrage qui soit un biholomorphisme local en tout point, et doit autoriser des points où la dérivée du paramétrage s'annule (et donc où le paramétrage n'est pas localement injectif). Autrement dit, le paramétrage que construit Poincaré n'est pas un vrai revêtement, mais un revêtement ramifié. Plus précisément, Poincaré montre le résultat suivant :

Quatrième théorème d'uniformisation (Uniformisation des fonctions, énoncé moderne. Poincaré, 1883)**.** *Soit y un germe de fonction analytique d'une variable x, et S la surface de Riemann associée à ce germe.*[17] *Il existe un revêtement ramifié $\pi : U \to S$ où U est un ouvert borné*[18] *de $\mathbb{C}$.*

L'énoncé original de Poincaré découle immédiatement de cet énoncé moderne : si S est la surface de Riemann associée à un germe y de fonction analytique d'une

[17] En fait, la preuve de Poincaré fonctionne aussi dans le cadre plus général où S est une surface de Riemann abstraite qui admet une fonction méromorphe non constante.

[18] Il faudra attendre 1900 pour que William Osgood réussisse à montrer que l'ouvert borné U peut être choisi égal au disque unité. Ce fait découle bien sûr du théorème de représentation de Riemann, mais on ne disposera pas de preuve rigoureuse de ce dernier avant le début du XXème siècle.

variable complexe x, et si U est l'ouvert de $\mathbb{C}$ donné par le théorème ci-dessus, alors x et y peuvent être vues comme des fonctions uniformes définies sur la surface S, et donc, comme des fonctions uniformes de la coordonnée z du plan complexe contenant l'ouvert U.

Pour mesurer la fantastique audace mathématique de Poincaré, et l'incroyable portée de ce « théorème d'uniformisation des fonctions », il faut songer à la diversité des « fonctions » multiformes et à la complexité de certaines de ces fonctions : les solutions d'équations différentielles en sont de bons exemples, particulièrement chers au cœur de Poincaré. Deux ans auparavant, aucun mathématicien n'aurait oser rêver d'un énoncé d'une telle généralité !

On notera cependant que si ce théorème est un formidable progrès du point de vue de la théorie des fonctions, c'est un résultat beaucoup moins satisfaisant du point de vue des surfaces de Riemann (comme le soulignera Hilbert dans sa célèbre adresse au Congrès des mathématiciens en 1900). Le fait que le paramétrage obtenu soit singulier en certains points n'est pas anodin : on notera, par exemple, que ce théorème ci-dessus conduit à « uniformiser » le plan complexe par un ouvert borné, *via* un paramétrage hautement non-injectif qui évite certains points !

Je ne veux pas exposer ici une preuve détaillée du théorème d'uniformisation des fonctions (je renvoie les lecteurs intéressés à [St-Gervais2010, chapitre XI]). Je me contenterai de présenter deux ingrédients cruciaux utilisés par Poincaré dans cette preuve (l'uniformisation des domaines simplement connexes relativement compacts à bords polygonaux, et la construction du revêtement universel d'une surface de Riemann), puis d'expliquer rapidement comment Poincaré utilise ces ingrédients pour concocter une preuve.

4.1 La naissance du revêtement universel

Pour montrer son théorème, Poincaré a besoin de construire un revêtement simplement connexe d'une surface de Riemann associée à des germes de fonctions analytiques. Il le fait de manière très simple et très naturelle.

Poincaré considère la surface de Riemann S associée à des germes de fonctions analytiques $y_1, \ldots, y_m$ d'une variable x, et annonce qu'il va construire une surface de Riemann simplement connexe $\widetilde{S}$ qui revêt S. Il commence par dire que $\widetilde{S}$ sera une surface de Riemann étalée au-dessus du plan des x, et que $\widetilde{S}$ sera entièrement définie si l'on sait, pour tout lacet C tracé dans le plan des x, à quelle condition les deux extrémités d'un relevé de C seront sur un même feuillet de $\widetilde{S}$ (il est sous-entendu que cette condition ne dépendra que de C, pas du relevé choisi). Poincaré distingue alors deux sortes de lacets C :

1. ceux tels que le prolongement de l'un au moins des germes $y_1, \ldots, y_m$ ne revient pas à sa valeur initiale quand la variable x parcourt le lacet C ;
2. ceux tels que les prolongements des germes $y_1, \ldots, y_m$ reviennent tous à leurs valeurs initiales quand la variable x parcourt C.

Il divise ensuite les lacets de la deuxième sorte en deux espèces :

1. les lacets de la première espèce sont ceux que l'on peut déformer de façon continue en un point de telle manière qu'au cours de la déformation, le lacet reste constamment de la deuxième sorte ;

2. les autres lacets sont de la seconde espèce.

Il ne reste plus qu'à dire que le point initial et le point final d'un relevé d'un lacet C seront situés sur un même feuillet de $\widetilde{S}$ si et seulement si C est de la deuxième sorte et de la première espèce. Ceci définit entièrement la surface $\widetilde{S}$.

Cette construction du revêtement universel, bien qu'élémentaire, est peut-être le point le plus important de l'article de Poincaré (c'est en tout cas ce que pense Brad Osgood ; voir [Osgood1998]). C'est grâce à elle que les progrès vers le théorème d'uniformisation général pourront désormais se concentrer sur les surfaces de Riemann simplement connexes.[19]

4.2 L'uniformisation des domaines relativement compacts à bord polygonaux

Nous dirons qu'un domaine D d'une surface de Riemann S est *à bord polygonal* si le bord de D est une sous-variété topologique de dimension 1, et s'il existe un atlas holomorphe de S tel que, dans chaque carte dont le domaine de définition rencontre le bord de D, celui-ci apparaît localement soit comme un segment de droite, soit comme la réunion de deux segments de droites issus d'un même point. Dans son article, Poincaré utilise de manière cruciale le résultat suivant qu'il attribue à Hermann Schwarz :

Théorème 7 (Schwarz, 1870)**.** *Tout domaine simplement connexe relativement compact à bord polygonal d'une surface de Riemann est biholomorphe au disque unité.*

À vrai dire, un tel énoncé n'apparait pas dans les écrits de Schwarz. Il n'en est pas moins vrai que la *méthode alternante* développée par Schwarz dans [Schwarz1870] (voir ci-dessous) permet de prouver le théorème 7.

La preuve du théorème 7 passe par la construction d'une *fonction de Green* :

Définition 8. Soit S une surface de Riemann et p_0 un point de S. On dit qu'un fonction $u : S \to \mathbb{R}$ admet *une singularité logarithmique simple* en p_0 s'il existe un voisinage V de p_0 dans S et une carte holomorphe $z : V \to \mathbb{C}$ tels que la fonction $p \mapsto u(p) + \log|z(p) - z(p_0)|$, définie sur V, est bornée.

Définition 9. Soit maintenant S une surface de Riemann, et Ω un domaine de S. Une *fonction de Green* sur Ω est une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ pour laquelle il existe un point $p_0 \in \Omega$ tel que :

1. u présente une singularité logarithmique simple en p_0 ;
2. u est harmonique sur $\Omega \setminus \{p_0\}$;
3. $u(p)$ tend vers 0 quand p sort de tout compact de Ω.

On doit à Riemann d'avoir remarqué que les fonctions de Green permettent de construire des biholomophismes vers le disque unité :

Lemme 10 (Riemann)**.** *Si un domaine simplement connexe Ω d'une surface de Riemann admet une fonction de Green, alors Ω est biholomorphe au disque unité $\mathbb{D}$.*

[19] La définition de Poincaré concerne le cas d'une surface de Riemann associée à des germes de fonctions analytiques. Cette construction se généralise cependant naturellement au cas d'une surface de Riemann quelconque (étalée au-dessus du plan ; rappelons que, jusqu'au travaux de Weyl dans les années 1910 ([Weyl1913]), les surfaces de Riemann ne sont jamais vues comme des variétés abstraites ; elles sont toujours vues comme des revêtements ramifiés d'ouverts de $\widehat{\mathbb{C}}$).

Plus précisément, si g est une fonction de Green sur un domaine simplement connexe Ω, et si g^* est une conjuguée harmonique de g (c'est-à-dire une primitive de la 1-forme $\xi \mapsto dg(i\xi)$), alors on vérifie facilement que la fonction $G := \exp(g + ig^*)$ définit un biholomorphisme entre Ω et le disque unité.

Pour prouver le théorème 7, il suffit donc de montrer que tout domaine simplement connexe relativement compact à bord polygonal Ω admet une fonction de Green. C'est le but de la *méthode alternante de Schwarz*. Je ne décrirai pas précisément cette méthode ici ; disons simplement en quelques mots que cette méthode consiste à :

1. Recouvrir le domaine Ω par un nombre fini de domaines $U_1, \ldots, U_q$ tels que : pour chaque i, il existe un biholomorphisme ϕ_i de U_i sur le disque unité $\mathbb{D}$ qui s'étend en un homéomorphisme de $\bar{U}_i$ sur le disque unité fermé $\bar{\mathbb{D}}$. C'est ici qu'intervient l'hypothèse « Ω est à bord polygonal ». L'existence du biholomorphisme ϕ_i implique que l'on sait résoudre le problème de Dirichlet sur U_i : quelle que soit la fonction $v : \partial U_i \to \mathbb{R}$, on sait construire une fonction continue $\bar{v} : \bar{U}_i \to \mathbb{R}$, dont la restriction au bord est v, et qui est harmonique sur U_i (il suffit de se ramener au disque unité *via* ϕ_i, et d'utiliser le noyau de Poisson).
2. Choisir un point $p_0 \in D$ et une fonction $u_0 : D \to \mathbb{R}$ qui admet une singularité logarithmique simple en p_0, puis construire par récurrence une suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$ comme suit : si n est congru à r modulo q, alors u_n est la fonction continue qui coïncide avec u_{n-1} sur $D \setminus U_r$, et qui est harmonique sur U_r (à moins que p_0 ne soit dans U_r, auquel cas u_n est la fonction continue qui coïncide avec u_{n-1} sur $D \setminus U_r$, et qui est harmonique sur $U_r \setminus \{p_0\}$ avec singularité logarithmique en p_0). Ainsi, les termes de la suite (u_n) sont harmoniques alternativement sur les domaines $U_1, \ldots, D_n$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge (c'est le point délicat ; il faut utiliser astucieusement le principe du maximum). Il est alors facile de voir que la limite u est une fonction de Green sur D.

Pour plus de détails, voir [St-Gervais2010, partie XI.1].

4.3 La stratégie de Poincaré pour montrer son quatrième théorème d'uniformisation

Soit y un germe de fonction analytique d'une variable x, et S la surface de Riemann associée au germe x. On rappelle que S est étalée au-dessus du plan des x. Ainsi, la variable x peut-être vue comme une fonction méromorphe non constante sur la surface S ; de surcroît, cette fonction est un biholomorphisme local au voisinage de chaque point de S (sa dérivée ne s'annule pas).

La première étape de la preuve de Poincaré est astucieuse. Poincaré construit une surface de Riemann Σ qui est un revêtement ramifié de S, et telle qu'il existe une fonction holomorphe non constante h sur Σ à valeurs dans le disque unité. En fait, il construit une surface Σ qui est à la fois un revêtement ramifié de S et un revêtement ramifié du disque unité (la fonction h n'est alors autre que l'application de revêtement de Σ sur $\mathbb{D}$). Cette constrution utilise la fonction méromorphe $x : S \to \widehat{\mathbb{C}}$, ainsi qu'une fonction fuchsienne[20] $F : \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$.

[20] *i.e.* une fonction méromorphe $F : \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$ invariante par un résau cocompact Γ de $\mathrm{Auto}(\mathbb{D}) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Rappelons que l'existence de telles fonctions était l'une des découvertes majeures que Poincaré avait faites deux années plus tôt.

Poincaré construit alors le revêtement universel $\widetilde{\Sigma}$ de la surface de Riemann Σ, comme nous l'avons expliqué dans la partie 4.1. Puisque Σ est un revêtement ramifié de S, il lui suffit, pour montrer le théorème d'uniformisation des fonctions, de montrer que $\widetilde{\Sigma}$ est biholomorphe à un ouvert bornée de $\mathbb{C}$. C'est ce que Poincaré va s'attacher à faire.

Poincaré considère une exhaustion de $\widetilde{\Sigma}$ par une suite croissante de domaines simplement connexes relativement compacts à bords polygonaux $D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \ldots$, et fixe un point $p_0 \in D_0$. On a vu qu'il savait construire, pour tout k, une fonction de Green $g_k : D_k \to \mathbb{R}$ qui s'annule sur le bord de D_k, admet une singularité logarithmique simple en p_0, et est harmonique sur $D_k \setminus \{p_0\}$.

Il faut maintenant montrer que la suite (g_k) converge. Le point crucial est le suivant : si l'on note $\widetilde{h}$ un relèvement à $\widetilde{\Sigma}$ de l'application $h : \Sigma \to \mathbb{D}$, et que l'on considère la fonction $t := -\log|\widetilde{h}|$, alors les fonctions g_k sont toutes majorées par t. En effet, $t - g_k$ est positive sur le bord de D_k (car g_k s'annule sur le bord de D_k, et $t := -\log|\widetilde{h}|$ est partout positive puisque h est à valeurs dans le disque unité), donc est positive sur D_k *via* le principe du maximum.

Ainsi, la suite $(g_k(p))$ est majorée pour tout point p qui n'est pas une singularité de $\widetilde{h}$. Comme la suite (g_k) est croissante, elle converge donc simplement vers une fonction $g : \widetilde{\Sigma} \to [0, +\infty]$ qui est finie en tout point p qui n'est pas une singularité de $\widetilde{h}$. Le théorème de convergence dominée permet facilement de montrer que g a une singularité logarithmique en p_0, et est harmonique sur $\widetilde{\Sigma} \setminus \{p_0\}$.

Pour tout k, nous avons vu que $G_k := \exp(g_k + ig_k^*)$ défini un biholomophisme de D_k vers le disque unité $\mathbb{D}$ (lemme 10). Puisque la suite de fonctions (g_k) converge vers la fonction g, la suite de biholomorphismes (G_k) converge (uniformément sur les compacts) vers la fonction holomorphe $G := \exp(g + ig^*)$. Puisque g a une singularité logarithmique, G n'est pas constante. Elle est injective car les G_k le sont. Par conséquent, G est un biholomorphisme de $\widetilde{\Sigma}$ sur un ouvert du disque unité.

Pour plus de détails, voir [St-Gervais2010, partie XI.3].

Remarque 11. Une stratégie plus naïve consisterait à considérer le revêtement universel $\widetilde{S}$ de la surface S, et une exhaustion[21] de $\widetilde{S}$ par des domaines simplement connexes relativement compacts à bords polygonaux $D_0 \subset D_1 \subset \ldots$. Chaque domaine D_k admet une unique fonction de Green g_k, et la fonction $G_k := \exp(g_k + ig_k^*)$ définit un biholomophisme de D_k sur le disque unité. La suite des fonctions de Green $(g_k)_{k\geq 0}$ est bien sûr croissante. Le problème est que l'on a aucun moyen d'assurer que cette suite est bornée (pour la bonne raison qu'elle ne l'est pas toujours !). On ne peut donc pas garantir que la suite (G_k) converge vers un biholomorphisme de $\widetilde{S}$ sur un ouvert de $\mathbb{C}$.

[21] Laissons de côté le cas où $\widetilde{S}$ est homéomorphe à la sphère, qui avait été règlé par Schwarz en 1870, voir [Schwarz1870] ou [St-Gervais2010, partie IV.1].

5 Résoudre l'équation de Liouville : un autre moyen d'uniformiser les surfaces de Riemann algébriques

Je ne sais pas à qui l'on doit[22] d'avoir remarqué que l'uniformisation des surfaces était reliée à la résolution de l'équation de Liouville

$$\Delta u = 2e^u.$$

C'est en tout cas ce lien qui motive la mise au concours en 1890 par la *Société Royale des Sciences de Göttingen* de la résolution de cette équation :

> Le problème de la représentation conforme d'un domaine plan [*i.e.* un domaine du plan complexe ou d'une surface de Riemann étalée au-dessus du plan complexe] sur une portion d'une surface courbe de courbure constante égale à k est relié au problème de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles
>
> $$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2k\, e^u$$
>
> avec valeurs au bord et singularités prescrites.
>
> Pour ce dernier problème, on doit s'intéresser en premier lieu aux valeurs au bord et aux singularités spécifiées par Riemann dans sa théorie des fonctions abéliennes.
>
> La Société royale souhaite obtenir une réponse complète à la question suivante : est-il possible d'intégrer l'équation différentielle ci-dessus sur un domaine donné, avec des valeurs au bord et des singularités d'un certain type prescrites, sous l'hypothèse que la constante k a une valeur négative ?
>
> En particulier, la Société Royale souhaite voir traiter la question ci-dessus dans le cas où le domaine plan considéré est une surface de Riemann fermée à plusieurs feuillets, et où la fonction u ne doit admettre que des singularités logarithmiques.

Émile Picard publiera une solution à ce problème dès 1890 dans un article au Bulletin des Sciences Mathématiques ([Picard1890]). Dans cet article, Picard se contente cependant de montrer l'existence de solutions à l'équation de Liouville $\Delta u = -2e^u$ (avec singularités prescrites) sur un domaine borné de $\mathbb{C}$, affirmant que le cas d'une surface de Riemann fermée ne présente pas de difficulté supplémentaire. Cette affirmation est très excessive : il éprouvera le besoin de revenir à plusieurs reprises sur sa preuve (en 1893 [Picard1893a, Picard1893b, Picard1893c], en 1898 [Picard1898], et en 1900 et 1905 [Picard1900]) pour en éclaircir certains points, et expliquer comment passer du cas d'un domaine borné du plan à celui d'une surface fermée. Pour un exposé complet de cette preuve, voir [Picard1931, chapitre 4].

En 1898, Poincaré publie un mémoire dans lequel il propose sa propre solution du problème posé par la Société Royale des Sciences de Göttingen. L'un des intérêts du mémoire est que Poincaré y adopte un point de vue « intrinsèque ». L'équation

[22] Serait-ce à Schwarz ?

de Liouville $\Delta u = ke^u$ n'a de sens que sur un domaine de $\mathbb{C}$, ou sur une surface de Riemann S étalée au-dessus de $\mathbb{C}$ (on utilise des coordonnées pour définir le Laplacien). Pour relier cette équation à l'existence d'une uniformisante sur une surface de Riemann S, on doit donc choisir une coordonnée méromorphe sur S qui permet de voir S comme un revêtement ramifié au-dessus de $\widehat{\mathbb{C}}$, et chercher des solutions de l'équation de Liouville ayant des singularités d'un type prescrit aux points de ramifications et aux points de la fibre au-dessus de l'infini. Dans son mémoire, Poincaré construit une équation de Liouville directement sur une surface de Riemann S, sans l'aide d'une coordonnée méromorphe (voir ci-dessous). Les résultats du mémoire de Poincaré fournissent une preuve du théorème d'uniformisation pour les surfaces de Riemann algébriques. À notre avis, il s'agit d'ailleurs de la première preuve rigoureuse : les « preuves » de Klein et Poincaré du théorème d'uniformisation par la méthode de continuité nous semblent loin d'être convaincantes, et la solution de Picard à l'équation de Liouville ne nous semble complète — pour les surfaces fermées — qu'à compter de son article de 1905.

Avant d'évoquer la manière dont Poincaré résout l'équation de Liouville, je voudrais expliquer en quoi la résolution de l'équation de Liouville permet d'uniformiser les surfaces.

5.1 D'une uniformisante à une solution de l'équation de Liouville

Considérons tout d'abord un domaine U simplement connexe du plan complexe. Supposons que ce domaine soit uniformisé par le disque unité $\mathbb{D}$. Puisque U est simplement connexe, ceci signifie qu'il existe un biholomorphisme global $f : \mathbb{D} \to U$. On peut alors pousser la métrique hyperbolique de $\mathbb{D}$ sur U : on obtient une métrique riemannienne g_{hyp} sur U. Plus précisément, on a

$$g_{\text{hyp}} = 4\frac{\left|\frac{df^{-1}}{dz}\right|^2}{(1-|f^{-1}|^2)^2}dzd\overline{z}.$$

Notons

$$e^{u_z} = 4\frac{\left|\frac{df^{-1}}{dz}\right|^2}{(1-|f^{-1}|^2)^2}$$

le facteur conforme reliant les métriques g_{hyp} et $dzd\bar{z}$. En dérivant, et en tenant compte du fait que f^{-1} est holomorphe, on constate que

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{2\frac{df^{-1}}{dz}\frac{d\overline{f^{-1}}}{d\overline{z}}}{\left(1 - f^{-1}\overline{f^{-1}}\right)^2} = \frac{1}{2}e^{u_z}.$$

Par conséquent, la fonction $u_z : U \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation

$$\Delta_z u = 2e^u, \tag{2}$$

où $\Delta_z = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$ est l'opérateur de Laplace sur le plan complexe. On a donc montré le fait suivant : *si un domaine U simplement connexe du plan est uniformisé par le disque, alors l'équation de Liouville* (2) *admet une solution sur U.*

Considérons maintenant une surface de Riemann S. Supposons que S est uniformisée par le disque $\mathbb{D}$, c'est-à-dire qu'il existe un revêtement $f : \mathbb{D} \to S$ qui est un biholomorphisme local. Comme précédemment, on peut pousser en avant, à l'aide de f, la métrique hyperbolique de $\mathbb{D}$ sur S : en effet, bien que l'inverse f^{-1} ne soit bien défini que localement (*i.e.* soit multiforme), deux déterminations locales de f^{-1} diffèrent par un biholomorphisme de $\mathbb{D}$, et un tel biholomorphisme laisse invariante la métrique hyperbolique de $\mathbb{D}$. On obtient une métrique riemannienne g_{hyp} sur S. Choisissons maintenant une fonction méromorphe sur S, qui permet de voir S comme un revêtement ramifié au-dessus de la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. Notons z la coordonnée dans le plan complexe. On a alors, comme dans le paragraphe précédent

$$g_{\text{hyp}} = 4\frac{\left|\frac{df^{-1}}{dz}\right|^2}{(1-|f^{-1}|^2)^2}dzd\overline{z},$$

à ceci près que $\frac{df^{-1}}{dz}$ est « infini » aux points de ramification, et nul aux points de S qui sont dans la fibre de l'infini. On peut alors définir une fonction $u_z : S \to \mathbb{R}$ comme dans le paragraphe précédent ; cette fonction sera à nouveau solution de l'équation de Liouville (2). La seule différence, c'est que u_z devra avoir des singularités aux points de ramification et aux points de la fibre de l'infini. Il est facile de voir déterminer la forme des singularités (par exemple, aux points de ramification, ce sont des singularités logarithmiques, avec un coefficient qui dépend de l'ordre de ramification). Ainsi : *si une surface de Riemann algébrique S est uniformisée par le disque, alors l'équation de Liouville* (2) *admet une solution sur S avec des singularités prescrites.*

Cette manière d'établir un lien entre l'uniformisation des surfaces de Riemann et l'existence de solutions à l'équation de Liouville n'est guère satisfaisante. Elle introduit en effet des singularités qui n'ont rien de naturel (dans le paragraphe ci-dessus, la métrique riemannienne g_{hyp} est parfaitement régulière ; les singularités sont celles de la « carte méromorphe » qui relie la surface considérée au plan complexe). Le problème vient de ce que l'on essaie d'utiliser sur S un opérateur différentiel (le laplacien Δ_z) qui n'est pas naturellement défini sur S, mais sur le plan complexe.

Dans son mémoire, Poincaré adopte un point de vue novateur, plus intrinsèque et plus naturel. Il montre que l'on peut construire un opérateur laplacien sur la surface S, et remplacer l'équation (2) par une « équation de Liouville » qui ne fait appel à aucun système de coordonnée particulière. Les uniformisantes correspondent à des solutions *non singulières* de cette « équation de Liouville intrinsèque ».

Expliquons cela. Soit S une surface de Riemann. À toute coordonnée holomorphe locale $z : U_z \subset S \to \mathbb{C}$ est associée un opérateur de Laplace $\Delta_z = 4\frac{\partial}{\partial z\partial\bar{z}}$, et donc aussi une équation de Liouville $\Delta_z u = -2e^u$ (qui n'a bien sûr de sens que sur le domaine U_z de la coordonnée z). Poincaré consacre le début de son mémoire à montrer que l'on peut recoller les équations de Liouville définies par toutes les coordonnées holomorphes locales, afin de construire une « équation de Liouville » globale sur S. Pour ce faire, il considère une métrique riemannienne g sur S, compatible avec la structure holomorphe de S (*i.e.* telle que la structure conforme définie par g sur g coïncide avec celle définie par les cartes holomorphes).[23] Pour toute carte

[23]Il est très facile de construire une telle métrique à l'aide d'une *partition de l'unité*. Ce concept est cependant postérieur au mémoire de Poincaré, qui renvoit à une construction (complexe et un peu obscure, nous semble-t-il) de Klein.

holomorphe $z : U_z \subset S \to \mathbb{C}$, il existera alors une fonction $\sigma_z : U_z \to \mathbb{R}$ telle que $g = e^{-\sigma_z} dz d\bar{z}$. Poincaré montre tout d'abord que la métrique g permet de recoller les opérateurs de Laplace associés aux différentes cartes holomorphes : il existe un opérateur $\Delta_g : C^2(S, \mathbb{R}) \to C^0(S, \mathbb{R})$ (que l'on appelle aujourd'hui *opérateur de Laplace-Beltrami*) tel que, pour toute carte holomorphe locale $z : U_z \subset S \to \mathbb{C}$, on a

$$\Delta_g = 4e^{\sigma_z}\Delta_z$$

sur U_z. Puis Poincaré montre que l'on peut définir une équation de Liouville globale. Plus précisément, il montre qu'une fonction $u : S \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation de Liouville $\Delta_z u = 2e^u$ pour toute coordonnée holomorphe locale $z : U \subset S \to \mathbb{C}$, si et seulement si elle est solution de l'équation

$$\Delta_g = 2e^u - \phi_g \tag{3}$$

où $\phi_g : S \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $\phi_g = -\frac{1}{2}\Delta_g \sigma_z$ dans chaque carte holomorphe locale z. Les arguments des paragraphes précédents montrent alors :

Proposition 12. *Si la surface S est unformisée par le disque, l'équation* (3) *admettra une solution (non singulière).*

5.1.1 D'une solution de l'équation de Liouville à une uniformisante

Dans son mémoire, Poincaré explique — comme nous l'avons fait ci-dessus — pourquoi l'existence d'une uniformisante implique l'existence d'une solution à l'équation (3). Étonnement, il n'énonce jamais la réciproque.[24][25] Ce lien passe par l'interprétation de l'équation de Liouville (3) en termes de courbure de Gauss, que Poincaré n'évoque nulle part.

Soit U est un domaine du plan complexe et $u : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Un calcul pénible mais élémentaire montre que la courbure de Gauss de la métrique riemannienne $e^u dz d\bar{z}$ est égale à

$$-\frac{1}{2}e^{-u}\Delta_z u \tag{4}$$

(voir par exemple [Jost2002]). De ceci, on déduit facilement qu'une fonction u est solution de l'équation de Liouville (2), si et seulement si la métrique riemannienne $e^u dz d\bar{z}$ est à courbure constante -1.

Soit maintenant S une surface de Riemann compacte de genre supérieur ou égale à 2, et g une métrique riemannienne sur S compatible avec la structure holomorphe de S. On considère la fonction $\phi_g : S \to \mathbb{R}$ définie comme au paragraphe précédent : dans chaque carte holomorphe z, on a $\phi_g = -\frac{1}{2}\Delta_g \sigma_z = -2e^{\sigma_z}\Delta_z \sigma_z$ où σ_z est la fonction telle que $g = e^{-\sigma_z} dz d\bar{z}$. La formule (4) montre que ϕ_g n'est autre que l'opposé

[24] Il semble néanmoins parfaitement conscient de l'existence de cette réciproque, puisqu'il écrit :

> L'intégration de [l'équation de Liouville (3)] conduirait en effet directement à la solution du problème qui nous occupe [l'existence d'uniformisantes pour les surfaces de Riemann algébriques].

[25] Poincaré considère avoir donné quinze ans plus tôt une preuve parfaitement rigoureuse du théorème d'uniformisation des surfaces algébriques via la m'ethode de continuité. Il semble que le but de Poincaré n'était pas tellement de donner une nouvelle preuve du théorème d'uniformisation des surfaces, mais plutôt de développer des moyens pour *calculer* (de manière approchée) l'uniformisante d'une surface donnée. On notera en effet qu'il explique avec soin comment, supposant l'existence d'une uniformisante, on peut retrouver celle-ci à partir d'une solution de l'équation (3).

de la courbure de Gauss de la métrique g. En utilisant à nouveau la formule (4), on en déduit que la fonction u est solution de l'équation « de Liouville » (3) si et seulement si la métrique $e^u g$ est à courbure constante -1.

Ainsi, si l'équation (3) admet une solution u, alors le revêtement universel de S est une surface riemannienne simplement connexe complète à courbure constante -1. Il est bien connu qu'une seule telle surface riemannienne est isométrique au disque de Poincaré. On en déduit :

Proposition 13. *L'existence d'une solution à l'équation* (3) *implique que la surface* S *est uniformisée par le disque.*

5.2 Comment Poincaré résoud l'équation de Liouville

Soit S une surface de Riemann compacte[26][27] de genre supérieur ou égal à deux, que l'on munit d'une métrique riemannienne g compatible avec la structure holomorphe de S. Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, montrer que la surface S est uniformisée par le disque équivaut à montrer que l'équation (3) admet une solution u. Les arguments de Poincaré permettent en fait de montrer l'existence et l'unicité d'une solution pour l'équation plus générale :

$$\Delta_g u = \theta e^u - \phi \tag{5}$$

où $\theta : S \to \mathbb{R}$ et $\phi : S \to \mathbb{R}$ sont des fonctons d'intégrales strictement positives données. Expliquons un peu comment Poincaré résoud cette équation.

La stratégie de Poincaré peut se résumer comme suit. Il part d'une équation qu'il sait intégrer explicitement : l'équation de Poisson $\Delta_g u = -\psi$ (pour une fonction ψ d'intégrale nulle quelconque). Puis il gagne du terrain : il essaie d'intégrer des équations « voisines », en montrant que les solutions de ces dernières peuvent s'écrire comme des sommes de séries de fonctions dont chacun des termes sont solutions d'équations de Poisson. Puis il recommence pour intégrer de nouvelles équations... À l'aide de développements en séries successifs, il élargit ainsi petit à petit le champ des équations aux dérivées partielles qu'il sait résoudre... Le but est bien sûr d'atteindre l'équation (5) en un nombre fini détapes.

Il peut être amusant de noter l'analogie entre cette stratégie et la *méthode de continuité* que Klein et Poincaré avaient imaginée 15 ans plus tôt (voir la partie 3). Ici, Poincaré part d'une équation aux dérivées partielles dont il connaît une solution explicite, puis se déplace dans l'ensemble des équations aux dérivées partielles en se frayant un chemin parmi les équations qu'il arrive à intégrer, jusqu'à atteindre l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \phi$. La méthode de continuité consistait, elle, à partir d'une surface algébrique que l'on sait uniformiser explicitement, puis à se déplacer dans l'espace des modules des surfaces algébriques en se frayant un chemin parmi les surfaces que l'on arrivait à uniformiser, jusqu'à atteindre la surface algébrique à laquelle on s'intéresse.

[26]Poincaré va utiliser la compacité de S pour assurer que certaines fonctions sont bornées. Il utilisera aussi l'algébricité de la surface S (on savait depuis les travaux de Riemann qu'une surface de Riemann est algébrique) pour construire des fonctions méromorphes à pôle prescrit sur S : à l'époque où Poincaré écrit, on ne savait résoudre le problème de Dirichlet pour le Laplacien ; pour construire des fonctions méromorphes sur une surface, on devait donc définir « explicitement » ces fonctions à l'aide d'*intégrales abéliennes*, voir par exemple [St-Gervais2010, sous-partie II.2.3].

[27]En fait, Poincaré considère aussi le cas des surfaces compactes privées d'un nombre fini de points, mais H.-P. de Saint-Gervais n'a pas réussi à comprendre sa preuve dans ce cas.

Voici, en un peu plus de détails, comment Poincaré procède :

1. Il considère tout d'abord l'équation de Poisson $\Delta_g u = -\psi$, où ψ est une fonction ψ d'intégrale nulle quelqconque. On savait depuis longtemps résoudre cette équation sur le plan : la fonction $p \mapsto \int \log|p-q|\psi(q) d\mathrm{vol}_g(q)$ (où $d\mathrm{vol}_g$ est la forme volume associée à g) est en effet solution. Autrement dit, sur le plan, la solution de l'équation de Poisson est obtenue par produit de convolution de ψ avec la *fonction de Green* $z \mapsto \log|z|$. Poincaré généralise ce procédé de résolution classique. Comme une surface compacte n'admet jamais de « vraie fonction de Green » (*i.e.* de fonction harmonique avec un seul pôle logarithmique), il doit utiliser une fonction avec deux pôles, ce qui crée quelques difficultés techniques. Plus précisément :
   (a) La surface S étant supposée algébrique, les travaux d'Abel et Jacobi permettent de construire des fonctions méromorphes à pôles prescrits sur S. Par exemple, si $F(x,y) = 0$ est une équation qui définit la surface S et si p_0, q_0, q sont trois points distincts de S, des arguments d'algèbre linéaire élémentaires montrent que l'on peut trouver un polynôme P et des nombres a, b, c tels que l'expression
   $$p \mapsto \int_{p_0}^{p} \frac{P(x,y)}{(ax+by+c)\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)} dx$$
   définit une fonction méromorphe sur S avec seulement deux pôles simples.
   (b) En considérant les parties réelles de telles fonctions, on trouve en particulier, pour tous points distincts p_0, q_0, q de S, une fonction $p \mapsto G_{p_0,q_0,q}(p)$, harmonique sur $S \setminus \{q_0, q\}$, avec des pôles logarithmiques en q_0 et q, et qui s'annule en p_0.
   (c) On vérifie alors que la fonction $\int_S G_{p_0,q_0,q}(p)\psi(q)\ d\mathrm{vol}_g(q)$ est solution de l'équation de Liouville.
2. Poincaré s'intéresse alors à l'équation $\Delta_g u = \eta u - \phi$.
   (a) Il montre tout d'abord que l'on peut intégrer l'équation $\Delta_g u = \lambda\eta u - \phi$ pour toutes fonctions η et ϕ données, pourvu que le réel λ soit suffisamment petit. Pour ce faire, il développe formellement la solution éventuelle de l'équation sous forme d'une série $u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots$, montre que les u_i sont solutions d'équations de Poisson (que l'on a appris à résoudre au point 1), et que la série converge pour λ suffisamment petit.
   (b) Puis, il montre (à l'aide d'un nouveau développement en série) que, si l'on sait intégrer l'équation $\Delta_g u = \lambda_0\eta u - \phi$ pour un certain λ_0, alors on sait aussi intégrer l'équation $\Delta_g u = (\lambda_0 + \lambda)\eta u - \phi$ pourvu que $\lambda < \lambda_0$.
   (c) Des deux points précédents, il tire que l'on sait intégrer l'équation $\Delta_g u = \lambda\eta u - \phi$ pour tout $\lambda > 0$. En particulier, on sait intégrer l'équation $\Delta_g u = \eta u - \phi$.
3. Poincaré peut alors s'attaquer à la résolution de l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \phi$ proprement dite.
   (a) Il commence par remarquer que l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \phi$ admet une solution évidente (constante) si ϕ est proportionnelle à θ.

(b) Puis il montre (en développant une fois de plus en séries), que si l'on sait intégrer l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \phi_0$ pour une certaine fonction ϕ_0, alors on sait intégrer l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - (\phi_0 + \lambda\psi)$ pour toute fonction ψ et pour λ assez petit. Notons que les arguments nécessaires pour montrer la convergence des séries qui définissent les solutions sont assez sophistiqués : on a maintenant affaire à des équations non-linéaires !

(c) Des deux points précédents, on déduit que l'on peut intégrer l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \phi$ dès lors que la fonction ϕ est partout positive.

(d) Il ne reste plus qu'à appliquer une astuce élémentaire pour passer du cas où la fonction ϕ est partout positive, au cas où elle est seulement positive en moyenne.

Au bout du compte Poincaré obtient le résultat suivant :

Cinquième théorème d'uniformisation (Uniformisation des surfaces compactes, via la résolution de l'équation de Liouville. Poincaré, 1898)**.** *Soit S une surface de Riemann compacte de caractéristique d'Euler strictement négative, et g une métrique riemannienne sur S, compatible avec la structure holomorphe de S. Quelles que soient la fonction $\theta : S \to \mathbb{R}$ strictement positive de classe C^1, et la fonction $\phi : S \to \mathbb{R}$ de classe C^1 d'intégrale strictement positive, l'équation* (5) *admet une (unique) solution $u : S \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Par suite, la surface S est uniformisée par le disque.*

La méthode imaginée par Poincaré pour résoudre l'équation (5) peut sembler un peu laborieuse. Mais elle a l'avantage de n'utiliser que des arguments parfaitement élémentaires. On notera par ailleurs que, même en s'autorisant des outils plus sophistiqués que ceux que Poincaré avait à sa disposition, la « résolution » de l'équation (5) n'est pas un fait complètement trivial. Ainsi, le mémoire de Poincaré ayant été oublié, il a fallu attendre 1971 pour que M. S. Berger réussisse à prouver, par des méthodes modernes (*i.e.* en utilisant la belle machinerie des distributions, des injections de Sobolev, de la compacité faible, et de la régularité elliptique), l'existence d'une solution à cette équation ! (Voir [Berger1971].)

On notera également que l'existence d'une solution de l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \phi$ correspond à l'existence d'une métrique à courbure $-\frac{1}{2}\theta$ dans la classe conforme de g. Ainsi, en 1898, Poincaré avait non seulement donné une nouvelle preuve du théorème d'unformisation pour les surface de Riemann algébriques, mais aussi résolu le problème de l'existence de métriques à courbure *variable* prescrite sur une surface compacte. La solution de ce problème ne sera redécouverte (avec l'article de Berger cité ci-dessus) que 73 ans plus tard !

Pour une description complète de la démonstration de Poincaré de l'existence et l'unicité de solutions à l'équation $\Delta_g u = \theta e^u - \phi$, je renvoie au chapitre X de [St-Gervais2010].

6 La méthode du balayage : une preuve physique du théorème d'uniformisation général

Dans sa célèbre adresse au congrès international des mathématiciens de 1900, Hilbert rappelle que la solution au problème de l'uniformisation trouvée par Poincaré pour les surfaces de Riemann non-algébriques (le théorème d'uniformisation des fonctions présenté dans la partie 4) n'est pas pleinement satisfaisante, puis invite les géomètres à se pencher à nouveau sur ce problème, dont l'importance ne peut selon lui être minorée. L'uniformisation des surfaces de Riemann sera le vingt-deuxième des vingt-trois célèbres problèmes de Hilbert *« dont l'étude pourrait concourir à un avancement de la Science »*.

> *« Comme Poincaré fut le premier à le démontrer, il est toujours possible d'uniformiser une relation algébrique quelconque entre deux variables par le biais de fonctions automorphes d'une variable. C'est-à-dire, étant donnée une équation algébrique en deux variables, on peut toujours exprimer ces dernières comme des fonctions automorphes d'une troisième variable de sorte qu'après substitution, la relation algbrique soit identiquement satisfaite. Poincaré s'est également attaqué avec succès à la généralisation de ce théorème fondamental pour des relations entre deux variables qui ne soient pas algébriques mais analytiques quelconques, et ceci en employant des méthodes complètement différentes de celles qui l'avaient mené à la résolution du premier problème mentionné. De la preuve de Poincaré de la possibilité d'uniformiser une relation analytique arbitraire entre deux variables, il ne résulte toutefois pas encore qu'il soit possible de choisir les fonctions uniformes de la nouvelle variable, de sorte que lorsque ladite variable parcourt son domaine de définition, la totalité des points réguliers de la surface analytique considérée soit atteinte. Au contraire, il apparaît dans les recherches de Poincaré, outre les points de branchement, certains autres points, qui en général constituent une partie infinie discrète de la surface considérée, et qui ne peuvent être atteints qu'en faisant tendre la nouvelle variable vers certains points à la frontière de son domaine de définition. Au vu de l'importance fondamentale que revêt le problème de Poincaré, il me semble qu'un éclaircissement et une résolution de cette difficulté seraient des plus souhaitables. »*

Il faudra attendre encore sept ans avant que Koebe et Poincaré ne réussissent — indépendamment l'un de l'autre, et par des méthodes sensiblement différentes — à (énoncer et) démontrer le « grand » théorème d'uniformisation que nous connaissons aujourd'hui ([Koebe1907a, Poincaré1907]) :

Sixième théorème d'uniformisation (Théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe, 1907)**.** *Toute surface de Riemann*[28] *simplement connexe est biholomorphe à la sphère de Riemann, au plan complexe ou au disque unité.*

La preuve de Koebe est tout à la fois astucieuse et rigoureuse, mais ce n'est pas le but de ce texte que d'en parler (je renvoie au chapitre XII de [St-Gervais2010]). Je vais par contre évoquer la preuve de Poincaré, qui prend une forme originale, puisqu'elle consiste, en quelque sorte, en une traduction mathématique[29] d'une

[28]Les preuves de Poincaré et Koebe nécessitent l'existence d'une fonction méromorphe sur la surface considérée. Cette existence est automatique, mais ce n'est pas un fait trivial. À l'époque, les surfaces de Riemann étaient *par définition* étalées au-dessus de $\widehat{\mathbb{C}}$, et portaient donc automatiquement une fonction méromorphe (la projection sur le plan). La notion moderne de surface de Riemann (*i.e.* celle de variété complexe de dimension 1) ne sera vraiment dégagée qu'à partir de 1912, grâce aux travaux d'H. Weyl.

[29]Jusqu'à un certain point cependant... Poincaré ne se prive pas d'utiliser parfois des arguments physiques qu'il serait bien en peine de justifier complètement d'un point de vue mathématique. Nous verrons que l'on ne peut rendre rigoureuse la preuve sans avoir recours à la théorie des distributions, qui ne sera inventée qu'une quarantaine d'années plus tard !

« expérience (de pensée) électrostatique ».

6.1 Stratégie de la preuve de Poincaré

Soit S une surface de Riemann simplement connexe. Schwarz avait montré dès 1870 qu'il n'existe (à biholomorphisme près) qu'une seule surface de Riemann compacte simplement connexe : la sphère de Riemann. On supposera donc dorénavant que S est non-compacte. La preuve de Poincaré utilise un résultat qu'Osgood avait démontré quelques années auparavant ([Osgood1900]). Ce résultat fait appel à une généralisation de la notion de fonction de Green (voir définition 9) :

Définition 14. Soit S une surface de Riemann. Une *majorante de Green* est une fonction positive $u : S \to \mathbb{R}$ ayant un ensemble discret de singularités, harmonique en dehors de ces singularités, tendant vers $+\infty$ au voisinage de chaque singularité et telle qu'au moins une des singularités, notée p_0, est une singularité logarithmique simple (si z est une coordonnée holomorphe au voisinage de p_0, alors $u(p)+\log|z(p)-z(p_0)|$ est bornée au voisinage de p_0).

Théorème 15 (Osgood, 1900)**.** *Si une surface de Riemann admet une majorante de Green, alors son revêtement universel est biholomorphe au disque unité.*

La preuve de ce résultat est assez astucieuse (on parle d'ailleurs parfois de *l'asctuce d'Osgood*), mais repose essentiellement sur la même stratégie (consistant à assurer la convergence de la suite des fonctions de Green associées à une exhaustion du revêtement universel de S par des disques à bords polygonaux) que la démonstration du quatrième théorème d'uniformisation que nous avons présentée dans la partie 4.

Poincaré ne cherche pas directement à construire une majorante de Green sur la surface S : il va faire un trou dans S, afin d'obtenir une surface à bord. Ce bord jouera un rôle fondamental dans sa preuve : il lui offrira une prise pour contrôler la suite de fonctions qu'il va construire, et lui permettra de montrer la convergence de cete suite vers une majorante de Green.

Précisément, on choisit une carte holomorphe locale z qui envoie un ouvert de S sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$. On choisit alors un réel $r > 0$ tel que le disque fermé $\bar{D}(0,r)$ soit inclus dans l'image de z, et l'on note

$$A := S \setminus z^{-1}(\bar{D}(0,r)).$$

Ainsi, A est un ouvert de la surface S homéomorphe à un anneau, et la frontière de A dans S est la courbe $\partial A = \{p \in S\ ;\ |z(p)| = r\}$. La proposition ci-dessous se déduit facilement du théorème d'Osgood 15 (voir [St-Gervais2010, Proposition XII.1.1]).

Proposition 16. *Supposons que A admette une majorante de Green. Alors S est biholomorphe au plan complexe ou au disque unité.*

6.2 Existence d'une majorante de Green sur A

D'après la proposition 16, on est ramené à la construction d'une majorante de Green sur A. Pour construire une telle fonction, Poincaré utilise une méthode basée sur une analogie électrostatique, qu'il nomme *méthode du balayage*.

Rappelons qu'une majorante de Green (à une seule singularité) est une fonction positive $u : A \to \mathbb{R}$, qui présente une singularité logathmique simple en un point $p_0 \in A$, et qui est harmonique sur $A \setminus \{p_0\}$. Poincaré pense aux fonctions sur A comme à des *potentiels électrostatiques*. D'après les lois de l'électrostatique,[30] un potentiel électrostatique $v : A \to \mathbb{R}$ est créé par une distribution de charges électriques sur A, dont la densité est Δv. Ainsi une fonction de Green $u : A \to \mathbb{R}$ avec singularité logarithmique en p_0 serait le potentiel électrostatique créé par une distribution de charges constituée d'une seule charge ponctuelle, positive, située en p_0. Poincaré part d'une fonction positive $u_0 : A \to \mathbb{R}$ qui présente une singularité logarithmique en p_0, mais n'est pas harmonique sur $A \setminus \{p_0\}$. La distribution de charges correspondante comporte alors une charge ponctuelle positive en p_0, et d'autres charges réparties sur $A \setminus \{p_0\}$. Pour transformer u_0 en une majorante de Green, il va falloir « chasser ces charges à l'infini ». Pour ce faire, Poincaré imagine de rendre certaines parties de A conductrices. Rappelons en effet que lorsqu'un corps chargé devient conducteur, les charges électriques sont chassées vers le bord de ce corps. Mathématiquement, « rendre conducteur » un domaine D de A revient à remplacer le potentiel électrique v par le potentiel v' qui coïncide avec v hors de l'intérieur D, et qui est harmonique sur l'intérieur de D (et qui est continu). Poincaré va recouvrir la surface A par des disques holomorphes $D_1, D_2, \ldots$, et « rendre ces disques conducteurs l'un après l'autre ». On peut alors espérer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ des potentiels électriques correspondant à ce processus convergera vers une majorante de Green.

Présentons maintenant le processus de balayage d'un point de vue plus mathématique. On fixe un point p_0 dans S. Rappelons qu'une fonction v *présente une singularité logarithmique simple en* p_0, si, pour une carte holomorphe z définie au voisiange de p_0, la fonction $v(p) + \log|z(p) - z(p_0)|$ est bornée au voisinage de p_0.

Soit D un ouvert de A tel qu'il existe un biholomorphisme de D sur le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ qui s'étend en un homéomorphisme de $\bar{D}$ sur le disque unité fermé (en particulier, D est d'adhérence compacte). Toute fonction continue $w : \partial D \to \mathbb{R}$ admet une unique *extension harmonique* à $\bar{D}$, c'est-à-dire une fonction $\bar{w} : \bar{D} \to \mathbb{R}$ continue sur $\bar{D}$ et harmonique dans D (cette fonction s'obtient par convolution de v avec le noyau de Poisson après avoir envoyé $\bar{D}$ sur le disque unité fermé). De plus, si p_0 est dans D, il existe une unique fonction de Green sur D avec singularité en p_0, c'est-à-dire une fonction $\bar{w} : \bar{D} \to \mathbb{R}$, continue sur $\bar{D} \setminus \{p_0\}$, harmonique sur $D \setminus \{p_0\}$, qui s'annule sur ∂D, et qui présente une singularité logarithmique simple en p_0.

Soit maintenant v une fonction définie sur $A \setminus \{p_0\}$, à valeurs réelles, continue et présentant une singularité logarithmique simple en p_0. On note v' la fonction qui coïncide avec v hors de D, et qui est définie comme suit sur D :

– si p_0 n'est pas dans D, alors $v'_{|D}$ est l'extension harmonique de $v_{|\partial D}$;
– si p_0 est dans D, alors $v'_{|D}$ est la somme de l'extension harmonique de $v_{|\partial D}$ et de la fonction de Green de D avec singularité en p_0.

Remarquons que v' a, dans tous les cas, une singularité logarithmique simple en p_0. On dit que v' est la fonction *obtenue à partir de* v *par balayage sur* D.

La méthode du balayage consiste à répéter cette opération une infinité de fois sur des disques qui recouvrent la surface A. Plus précisément, on considère un re-

[30]Ces lois n'ont *a priori* de sens physique que sur un ouvert du plan, alors que A est une surface de Riemann abstraite... mais le but est de se laisser guider par une expérience de pensée.

couvrement de A par une famille dénombrable d'ouverts $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, \ldots\}$ tels que, pour tout i, il existe un biholomorphisme de D_i sur le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ qui s'étend en un homéomorphisme de $\bar{D}_i$ sur le disque unité fermé, et p_0 n'est pas sur le bord de D_i. On considère maintenant une suite $(D_{i_k})_{k>0}$ d'éléments de la famille $\mathcal{D}$ avec la propriété suivante : chaque élément de $\mathcal{D}$ apparait une infinité de fois dans la suite $(D_{i_k})_{k\geq 0}$. Par exemple, on pourra prendre $D_{i_1}, D_{i_2}, D_{i_3}, \cdots = D_1, D_2, D_1, D_2, D_3, D_1, D_2, D_3, D_4, \ldots$. Partant d'une fonction continue $u_0 : A \setminus \{p_0\} \to \mathbb{R}$ positive qui admet une singularité logarithmique simple en p_0, on définit alors une suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$ par relation de récurrence : pour tout n, la fonction u_{n+1} est obtenue à partir de u_n par balayage sur D_{i_n}.

Il reste à montrer que cette suite (u_n) converge vers une majorante de Green.

6.3 Convergence du processus de balayage

Pour assurer la convergence du processus de balayage vers une majorante de Green, on a bien sûr le choix du potentiel u_0 avec lequel on initie le processus (la seule contrainte est que u_0 doit avoir un pôle logarithmique et un seul). Poincaré considère un potentiel u_0 qui est *sous-harmonique* sur $A \setminus \{p_0\}$ (voir la définition ci-après) ; ceci lui permettra d'utiliser le principe de Harnack (proposition 20) qui assurera la convergence de la suite (u_n) vers une majorante de Green sous la simple condition que cette suite ne tende pas partout vers l'infini.

Définition 17. Soit Σ une surface de Riemann. Une fonction continue $v : \Sigma \to \mathbb{R}$ est dite *sous-harmonique* si sa valeur en n'importe quel point $p \in \Sigma$ est inférieure à la moyenne de ces valeurs sur un cercle centré en p. Formellement, $v : \Sigma \to \mathbb{R}$ est *sous-harmonique* si, dans toute coordonnée holomorphe locale, pour tout point p et tout réel $r > 0$ assez petit, on a

$$v(p) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(p + re^{i\theta})\, d\theta. \tag{6}$$

Si v est de classe C^2, on vérifie facilement que v est sous-harmonique si et seulement si son laplacien[31] est partout négatif ou nul. Si v est seulement continue, son laplacien n'est pas défini au sens classique, mais il l'est au sens des distributions,[32] ce qui permet de généraliser le fait précédent : une fonction continue v est sous-harmonique si et seulement si son laplacien est positif au sens des distributions, c'est-à-dire si c'est une mesure positive. Rappelons maintenant que, si l'on voit v comme un potentiel électrostatique, alors la laplacien de v n'est autre que la distribution de charges électriques qui créé ce potentiel. Ainsi, un potentiel $v : \Sigma \to \mathbb{R}$ est sous-harmonique si et seulement si la distribution de charges électriques correspondante n'est constituée que de charges négatives. C'est de cette manière que Poincaré présente les choses : il considère une distribution de charges sur A, constituée d'une charge ponctuelle positive en p_0, et d'une distribution de charges négatives sur $A \setminus \{p_0\}$; le potentiel électrique correspondant a alors une singularité logarithmique simple en p_0, et est sous-harmonique sur $A \setminus \{p_0\}$.

[31] A vrai dire, sur une surface de Riemann qui n'est pas un domaine du plan, le laplacien n'est pas bien défini. Cependant la 2-forme différentielle donnée, dans chaque coordonnée holomorphe z, par $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx \wedge dy$ est, elle, bien définie. C'est cette 2-forme — notée habituellement $dd^c v$ — que j'appelle ici — par raccourci de langage — le « laplacien de v ».

[32] Plus exactement, la 2-forme $dd^c v$ est définie au sens des distributions ; voir la note précédente.

On suppose dorénavant fixé un point p_0 sur la surface de Riemann A, une fonction $u_0 : A \to \mathbb{R}$ continue, positive ou nulle, qui présente une singularité logarithmique simple en p_0, et qui est sous-harmonique sur $A \setminus \{p_0\}$. Il est facile de construire une telle fonction : si z est une coordonnée holomorphe locale définie sur un voisinage de p_0 qui envoie p_0 sur l'origine, on pourra par exemple considérer la fonction u_0 qui vaut $-\log|z(p) - z(p_0)|$ sur le disque de rayon $|z| \leq r$, et qui est constante égale à $\log r$ hors de ce disque. On suppose également fixée une famille de disques holomorphes fermés $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots\}$ dont les intérieurs revouvrent A. Enfin, on suppose fixée une suite $(D_{i_k})_{k\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ avec la propriété suivante : chaque élément de $\mathcal{D}$ apparait une infinité de fois dans la suite $(D_{i_k})_{k\geq 0}$. On définit alors par récurrence une suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$: pour tout n, u_{n+1} est obtenu à partir de u_n par balayage sur le disque D_{i_n}.

Fait 18. *Supposons que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge sur tout compact de $A \setminus \{p_0\}$ vers une fonction u. Alors u est positive ou nulle, harmonique sur $A \setminus \{p_0\}$, avec une singularité logarithmique simple en p_0.*

Pour montrer ce fait, commençons par remarquer que la définition de la suite (u_n) et le principe du maximum assure que u_n est positive ou nulle pour tout n. La limite u sera donc également positive ou nulle. Fixons maintenant un entier ℓ, et considérons une sous-suite $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que, pour tout k, le potentiel u_{n_k} est obtenu à partir du potentiel u_{n_k-1} par balayage sur le disque D_ℓ. Supposons d'abord que p_0 n'est pas dans D_ℓ. Alors, u_{n_k} est harmonique sur D_ℓ pour tout k. Comme u_{n_k} converge vers u uniformément sur D_ℓ, on en déduit immédiatement que u est harmonique sur D_ℓ. Si p_0 est dans D_ℓ, le même raisonnement appliqué à $u_{n_k} - u_0$ (au lieu de u_{n_k}) montre que $u - u_0$ est harmonique sur D_ℓ, et donc que u est harmonique sur $D_\ell \setminus \{p_0\}$ avec une singularité logarithmique simple en p_0. Ceci termine la preuve du fait 18.

Fait 19. *Pour tout n, la fonction u_n est sous-harmonique sur $A \setminus \{p_0\}$ et présente un pôle logarithmique simple en p_0. De plus, la suite (u_n) est croissante.*

Ce fait se démontre par récurrence. Supposons que u_n est sous-harmonique sur $A \setminus \{p_0\}$, avec un pôle logarithmique simple en p_0. Rappelons que u_{n+1} est obtenue à partir de u_n par balayage sur le disque D_{i_n}. Hors de D_{i_n}, on a donc $u_{n+1} = u_n$. Ainsi la fonction $u_{n+1} - u_0$ est harmonique sur D_{i_n}, alors que la fonction $u_n - u_0$ est sous-harmonique sur ce disque. Ainsi la fonction $u_n - u_{n+1}$ est sous-harmonique sur D_{i_n} et s'annule au bord de ce disque. Par le principe du maximum (pour les fonctions sous-harmoniques), ceci montre que $u_n \leq u_{n+1}$. On peut vérifier que u_{n+1} est sous-harmonique (avec un pôle logarithmique en p_0) par un calcul simple (en utilisant directement les définitions et la majoration $u_n \leq u_{n+1}$) ; donnons plutôt — comme Poincaré — une preuve « physique » de ce fait : pour passer de u_n à u_{n+1}, on rend $D_{i_n} \setminus \{p_0\}$ conducteur ce qui a pour effet de « balayer les charges vers le bord » ; comme il n'y avait que des charges négatives sur $A \setminus \{p_0\}$ avant balayage (puisque u_n est sous-harmonique), il n'y a aussi que des charges négatives après balayage ; donc u_{n+1} est également sous-harmonique sur $A \setminus \{p_0\}$.

Poincaré fait alors usage du *principe de Harnack* :

Proposition 20 (Principe de Harnack)**.** *Soit Ω un ouvert simplement connexe d'une surface de Riemann et (u_k) une suite croissante de fonctions sous-harmoniques sur*

Ω. *Alors* (u_k) *converge uniformément sur tout compact, soit vers* $+\infty$, *soit vers une fonction sous-harmonique.*

On trouvera une preuve de ce principe (basée sur l'inégalité du même nom) par exemple dans [St-Gervais2010, chapitre XII]. Les faits 19 et 18, combinés au principe de Harnack, impliquent :

Proposition 21. *S'il existe un point* $p \in A \setminus \{p_0\}$ *tel que la suite de réels* $(u_n(p))_{n\geq 0}$ *est bornée, alors la suite de fonctions converge uniformément sur les compacts de* $A \setminus \{p_0\}$ *vers une fonction* $u : A \to \mathbb{R}$ *continue, positive, qui possède une singularité logarithmique en* p_0, *et qui est harmonique sur* $A \setminus \{p_0\}$ *(en particulier,* u *est une majorante de Green).*

On est donc ramené à trouver un point $p \in A \setminus \{p_0\}$ tel que la suite $(u_n(p))_{n\geq 0}$ est bornée. Le point crucial est le suivant :

Proposition 22. *L'intégrale sur* A *du laplacien*[33] *de* u_n *ne dépend pas de* n.

Poincaré considère vraisemblablement le fait 22 comme une évidence physique ; toujours est-il qu'il n'en donne aucune preuve. Rappelons que, si l'on voit u_n comme un potentiel électrostatique, le laplacien de u_n n'est autre que la distribution de charges qui crée ce potentiel. Le fait 22 traduit donc la « conservation de la charge électrique totale au cours du processus de balayage » : lorsque l'on passe de u_n à u_{n+1}, les charges électriques négatives situés sur le disque D_{i_n} vont se répartir sur le bord de ce disque, mais la charge électrique totale de A reste inchangée. Pour une preuve plus mathématique du fait 22, je renvoie à [St-Gervais2010, Proposition XIII.2.4].

Du fait 22, on va déduire que l'intégrale de u_n sur certaines courbes est bornée indépendamment de n. Pour $s > 0$, on note $\mathbb{D}(0, s)$ le disque ouvert de rayon s centré à l'origine dans $\mathbb{C}$. Le lemme technique suivant découle facilement de la formule de Green (voir [St-Gervais2010, Lemme XIII.2.5]) :

Lemme 23. *Soient* r *et* r' *tels que* $0 < r < r' < 1$. *Si* $u : \mathbb{D}(0, 1) \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue, sous-harmonique et qui s'annule sur le disque* $\mathbb{D}(0, r)$, *alors*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r'e^{i\theta})d\theta \leq \log\frac{r'}{r}\int_{\mathbb{D}(0,r')} \Delta u. \tag{7}$$

Pour appliquer ce lemme au problème qui nous préoccupe, souvenons-nous comment a été construite la surface de Riemann A. Au départ, on avait une surface de Riemann simplement connexe non compacte S. On a choisi une carte holomorphe locale z qui envoie un ouvert de S sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$. On a alors choisi un réel $r > 0$ tel que le disque fermé $\bar{D}(0, r)$ soit inclus dans l'image de z, et l'on a noté $A := S \setminus z^{-1}(\bar{D}(0, r))$.

Choisissons maintenant un réel $r' > r$, tel que le disque fermé $\bar{D}(0, r)$ soit encore inclus dans l'image de la carte z. Notons $D := z^{-1}(D(0, r))$ et $D' := z^{-1}(D(0, r'))$. Pour tout n, notons $\bar{u}_n : S \to \mathbb{R}$ la fonction qui est égale à u_n sur $A = S \setminus \overline{D}$, et nulle sur $\overline{D}$. Le lemme 23 montre que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\int_{\partial D'} u_n = \int_{\partial D'} \bar{u}_n \leq \log\frac{r'}{r}\int_{D'} \Delta\bar{u}_n = \log\frac{r'}{r}\int_{D'\setminus\overline{D}} \Delta u_n \leq \log\frac{r'}{r}\int_A \Delta u_n \tag{8}$$

[33]Voir la note 31.

(où $\int \Delta u_n$ est à prendre au sens expliqué dans la note 31).

La majoration (8) et le fait 22 montrent que l'intégrale de u_n sur le cercle $\partial D'$ est bornée indépendamment de n. On en déduit facilement l'existence d'un point $p \in \partial D'$ telle que la suite $(u_n(p))_{n\geq 0}$ est bornée. D'après le fait 21, ceci implique l'existence d'une majorante de Green. Et, comme nous l'avons expliqué au début de cette partie, ceci implique que la surface de Riemann S est biholomorphe au plan ou au disque.

6.4 La preuve simplifiée de Koebe

Moins d'un mois après la publication du mémoire de Poincaré, Koebe soumet une note dans laquelle il expose une manière alternative d'obtenir l'existence d'une majorante de Green sur l'anneau A ([Koebe1907b]). Il ne s'agit pas à proprement parler d'une nouvelle preuve, mais plutôt d'un nettoyage radical de la preuve de Poincaré.

En fait, Koebe a compris que la preuve de Poincaré contient un argument réellement nouveau : le fait que l'intégrale du laplacien de u_n ne dépend pas de n (que Poincaré interprète — rappelons-le — comme la conservation de la « charge électrique » globale). De la preuve de Poincaré, Koebe ne retient guère que cet argument crucial. Il évacue complètement le processus de balayage. Il considère une exhaustion de A par une suite croissante d'anneaux compacts $(A_n)_{n\geq 0}$. Il fixe un point p_0 dans l'anneau A_0. Pour chaque n, il sait que l'anneau A_n admet une fonction de Green u_n dont le pôle est situé en p_0. Il reste à montrer que (u_n) converge vers une majorante de Green (voir définition 14 et proposition 16). Pour cela, il adapte l'argument de Poincaré, ce qui lui permet de majorer (indépendamment de n) l'intégrale de u_n sur un cercle donné proche du bord de A. Comme Poincaré, il en déduit l'existence d'un point p tel que la suite $(u_n(p))_{p\geq 0}$ est bornée et conclut à l'aide du principe de Harnack.

Tout comme Poincaré, Koebe ignore les problème liés à la régularité des fonctions qu'il considère. La preuve de Koebe est cependant valide : on peut vérifier assez facilement (et par des arguments élémentaires) que les fonctions qu'il considère sont régulières. C'est un avantage considérable par rapport à la preuve de Poincaré que l'on ne peut rendre rigoureuse — nous semble-t-il — sans utiliser la théorie des distributions. Mais la très belle interprétation électrostatique qui guidait Poincaré a hélas complètement disparu...

Références

[Berger1971] M. S. Berger – Riemannian structures of prescribed Gaussian curvature for compact 2-manifolds. J. Differential Geometry **5**, 325–332 (1971).

[Fuchs1866] L. Fuchs – Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veranderlichen Coeffizienten. J. Reine Angew. Math **66**, 121–160 (1866).

[Fuchs1880] — , Über die Functionen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen entstehen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 445–453 (1880).

[Jost2002] J. Jost – *Compact Riemann surfaces, An introduction to Contemporary mathematics, Second edition.* Springer, New York, 2002.

[Klein1881] F. Klein – Über die conforme Abbildung von Flächen. Math. Ann **19**, 159–160 (1881).

[Klein1882a] — , Über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich. Math. Ann. **19**, 565–569 (1882).

[Klein1882b] — , Über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich. *Math. Ann.* **20**, 49–51 (1882).

[Klein1882c] — , *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* ». Teubner, Leipzig, 1882. Traduction anglaise (édition révisée) : *On Riemann's theory of algebraic functions and their integrals*, Dover, Mineola (NY), 2003.

[Klein1882d] — , Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie. Math. Ann **21**, 141–218 (1882).

[Klein1921a] — , *Gesammelte mathematische Abhandlungen.* 3 volumes, Springer, Berlin, 1921–1923.

[KleinPoincaré1923] F. Klein, H. Poincaré – La correspondance d'Henri Poincaré et de Félix Klein. Acta Math. **39**, 94–132 (1923).

[Koebe1907a] P. Koebe – Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 191–210 (1907).

[Koebe1907b] — , Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven (zweite Mitteilung). Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 633–649 (1907).

[Osgood1998] B. Osgood – *Old and new on the Schwarz derivative*. In Quasiconformal mappings and analysis (Ann Arbor, 1995), Springer, New York, 1998, 275–308.

[Osgood1900] W. Osgood – « On the existence of the Green's function for the most general simply connected plane region ». *Trans. Amer. Math. Soc.* **1**, 310–314 (1900).

[Picard1890] É. Picard – Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. J. Math. Pures Appl. (4e série) **6**, 145–210 (1890).

[Picard1893a] — , Sur une équation aux dérivées partielles. C.R. Ac. Sci. **116**, 454–456 (1893).

[Picard1893b] — , Sur l'équation $\Delta u = e^u$. C.R. Ac. Sci. Paris **116**, 1015–1017 (1893).

[Picard1893c] — , De l'équation $\Delta u = ke^u$ sur une surface de Riemann fermée. J. Math. Pures Appl. (4e série) **9**, 273–292 (1893).

[Picard1898] — , De l'équation $\Delta u = e^u$. J. de Math. Pures et Appl. (5e série) **4**, 313–316 (1898).

[Picard1900] — , De l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur une surface de Riemann fermée. Bull. Sci. Math. **24**, 196–210 (1900). = J. Reine Angew. Math **130**, 243–258 (1905).

[Picard1931] — , *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*. Gauthier-Villars, Paris, 1931.

[Poincaré1881a] H. Poincaré – Sur les fonctions fuchsiennes. C.R. Acad. Sci. Paris **92**, 333–335 (1881).

[Poincaré1881b] — , Sur les fonctions fuchsiennes. C.R. Acad. Sci. Paris **92**, 395–396 (1881).

[Poincaré1881c] — , Sur les fonctions fuchsiennes. C.R. Acad. Sci. Paris **92**, 859–861 (1881).

[Poincaré1881d] — , Sur les fonctions fuchsiennes. C.R. Acad. Sci. Paris **92**, 1198–1200 (1881).

[Poincaré1881e] — , Sur les fonctions fuchsiennes. C.R. Acad. Sci. Paris **93**, 301–303 (1881).

[Poincaré1882a] — , Théorie des groupes fuchsiens. Acta Math. **1**, 1–62 (1882).

[Poincaré1882b] — , Mémoire sur les fonctions fuchsiennes. Acta Math. **1**, 193–294 (1882).

[Poincaré1883] — , Sur un théorème de la théorie générale des fonctions. Bull. Soc. Math. France **11**, 112–125 (1883).

[Poincaré1884] — , Sur les groupes des équations linéaires. Acta Math. **4**, 201–312 (1884).

[Poincaré1898] — , Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$. J. Math. Pures Appl. (5e série) **4**, 137–230 (1898).

[Poincaré1907] — , Sur l'uniformisation des fonctions analytiques. Acta Math. **31**, 1–64 (1907).

[Poincaré1908] — , L'invention mathématique. Conférence à l'Institut de Psychologie, 23 mai 1908. Enseignement Math. **10**, 357–371 (1908).

[Rowe1989] D. Rowe – Klein, Hilbert, and the Göttingen mathematical tradition. Osiris (1989), 186–213.

[St-Gervais2010] H.-P. de Saint-Gervais, *Uniformisation des surfaces de Riemann. Retour sur un théorème centenaire*. ENS Éditions, Lyon, 2010.

[Schwarz1870] H. Schwarz – Über einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren. Wolf J. **XV**, 272–286 (1870). = *Gesammelte mathematische Abhandlungen (2ter Band)* 133–143, Springer, Berlin, 1890.

[Weyl1913] H. Weyl – *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Teubner, Leipzig, 1913. Réimpression avec commentaires en anglais, Teubner, Stuttgart, 1997.