

L'aspect à mon sens le plus surprenant de la mécanique quantique est sa linéarité: on peut additionner deux états distincts quelconques pour former un nouvel état que l'on déduit comme la superposition des deux premiers.

Prenons que si l'on quantifie une théorie linéaire au niveau classique (donc décrite par un Hamiltonien quadratique par rapport aux coordonnées q_i, p_i), ce principe de superposition quantique agit très différemment du principe classique.

Si l'on prend un oscillateur harmonique ($H = \hbar\omega_0(a^\dagger a + 1/2)$, $[a, a^\dagger] = 1$), on peut fabriquer la famille des états cohérents:

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} e^{za^\dagger} |0\rangle$$

Pour un tel état, son évolution temporelle reste dans cette famille d'états, avec $z(t) = \exp(-i\omega_0 t) z$. Le principe de superposition classique consiste à dire que si $z_1(t)$ et $z_2(t)$ sont deux trajectoires pour ces états cohérents, alors $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$ l'est aussi, ce qui est immédiat car l'application $z \mapsto \exp(-i\omega_0 t) z$ est linéaire! Rappelons que si l'on pose:

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (a^\dagger + a) \text{ et } p = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} i(a^\dagger - a), \text{ alors } \begin{cases} \langle z | q | z \rangle = \sqrt{2\hbar} \operatorname{Re}(z) \\ \langle z | p | z \rangle = \sqrt{2\hbar} \operatorname{Im}(z) \end{cases}$$

Le principe de superposition classique est alors équivalent à la propriété que l'on peut additionner les vecteurs $(q(t); p(t))$ de deux solutions des équations d'Hamilton classiques et obtenir ainsi une nouvelle solution. (*)

Quantiquement, l'opération de superposition consiste à former la somme $|z_1\rangle + |z_2\rangle$, ce qui est un état très différent de $|z_1 + z_2\rangle$! Une façon relativement parlante de visualiser le caractère non classique de $|z_1\rangle + |z_2\rangle$ est de regarder la transformée de Wigner:

Pour un état quantique $|\psi\rangle$ décrit par la fonction d'onde $\psi(q)$, et si $\langle \psi | \psi \rangle = 1$, on pose:

$$P_W(q; p) \equiv \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-i p s / \hbar} \psi(q + \frac{s}{2}) \bar{\psi}(q - \frac{s}{2})$$

Pour l'état cohérent $|z_1\rangle$, la fonction d'onde correspondante est:

$$\psi_1(q) = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-i \frac{q_1 p_1}{2\hbar}\right) \exp\left[-\frac{(q - q_1)^2}{2\hbar} + i \frac{p_1 q}{\hbar}\right] \text{ avec } z_1 = \frac{q_1 + i p_1}{\sqrt{2\hbar}}$$

On a bien un paquet d'ondes centré spatialement au voisinage de $q = q_1$ et dont l'impulsion moyenne est p_1 . Ses états cohérents minimisent les fluctuations de q et de p compte tenu des contraintes imposées par le principe de Heisenberg:

$$\langle (\Delta q)^2 \rangle = \frac{\hbar}{2} \text{ et } \langle (\Delta p)^2 \rangle = \frac{\hbar}{2}$$

La transformée de Wigner correspondante est:

$$P_{W,1}(q; p) = \frac{2}{\hbar} \exp\left\{-\frac{(q - q_1)^2 + (p - p_1)^2}{\hbar}\right\}, \text{ en accord avec l'idée d'une "tache de"} \quad \underline{\hspace{10em}}$$

(*) Cette discussion se généralise facilement à tout système physique que l'on peut décrire comme une collection d'oscillateurs harmoniques indépendants: champ électromagnétique, champ des déformations élastiques d'un cristal, ondes de spin pour un milieu magnétique etc.... Dans le cas du champ électromagnétique, la donnée d'un nombre complexe z pour chaque mode du champ revient à se donner une configuration spatiale des champs électriques et magnétiques.

(D₂) probabilité "localisée" au voisinage du point (q_1, p_1) de l'espace de phases, sur une aie d'ordre $\hbar$.

Lorsque l'on effectue la superposition quantique des deux états cohérents centrés en (q_1, p_1) et (q_2, p_2) , on obtient quatre termes pour la fonction de Wigner correspondante:

$$\begin{aligned} \rho_w(q, p) = & \frac{2}{R d_{12}^p} \exp\left\{-\frac{(q-q_1)^2 + (p-p_1)^2}{\hbar}\right\} + \frac{2}{R d_{12}^p} \exp\left\{-\frac{(q-q_2)^2 + (p-p_2)^2}{\hbar}\right\} \\ & + \frac{2}{R d_{12}^p} \exp\left(-i \frac{(q_1 p_2 - p_1 q_2)}{2\hbar}\right) \exp\left(i \frac{(q-\bar{q}_{12})(p-\bar{p}_{12}) - (\bar{p}_{12}(q_1 - q_2))}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{(q-\bar{q}_{12})^2 + (p-\bar{p}_{12})^2}{\hbar}\right) \\ & + \text{c.c.} \end{aligned}$$

$$\text{Ici, } \bar{q}_{12} = \frac{q_1 + q_2}{2}; \bar{p}_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2}; d_{12}^p = \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle + \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle + \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle + \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle$$

$$d_{12}^p = 2 + \langle z_1 | z_2 \rangle + \langle z_2 | z_1 \rangle$$

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = \exp\left(i \frac{(q_1 p_2 - p_1 q_2)}{2\hbar}\right) \exp\left(-\frac{(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)^2}{4\hbar}\right)$$

La superposition des deux états cohérents se traduit, dans l'espace des phases, par la superposition des deux taches gaussiennes associées à chacun des deux états, puis entre ces deux taches, par une gaussienne modulée par une onde plane. Les lignes de phase constante de cette modulation sont dirigées selon le vecteur joignant les centres des deux taches "classiques". Dans cette région centrale, la fonction de Wigner change plusieurs fois de signe, donc il n'est plus possible de l'interpréter comme une densité de probabilité sur l'espace des phases classique: on parle alors d'état "non-classique". (*)

Dès les débuts de la mécanique quantique, la question s'est posée de savoir si ce principe de superposition des états quantiques s'applique à des systèmes macroscopiques. Ce débat a cristallisé autour du célèbre "chat de Schrödinger", qui, par un dispositif cruel mais ingénieux, pouvait être préparé dans une superposition linéaire de la forme $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{vivant}\rangle + |\text{mort}\rangle)$, qui est bien sûr distinct du mélange statistique $\frac{1}{2} |\text{vivant}\rangle \langle \text{vivant}| + \frac{1}{2} |\text{mort}\rangle \langle \text{mort}|$.

Sans avoir étudié en détail l'histoire de la mécanique quantique, on a l'impression que dans un premier temps, les pères fondateurs de cette discipline ont tenu à maintenir une frontière nette entre le monde microscopique, quantique, et le monde macroscopique, régi par la physique classique.

Toutefois, les succès de la mécanique quantique ne se sont pas limités au monde infra-atomique, puisqu'elle a permis d'élucider des phénomènes clairement macroscopiques comme la superfluidité ou la supraconductivité. Du point de vue expérimental, on ne voit donc pas a priori d'échelle de longueur au dessus de

(*) Notons que pour un mélange statistique des états $|z_1\rangle$ et $|z_2\rangle$ avec les poids $1/2$ et $1/2$, la matrice densité est $\rho = \frac{1}{2} |z_1\rangle \langle z_1| + \frac{1}{2} |z_2\rangle \langle z_2|$ et

$\rho_w(q, p) = \frac{1}{\hbar} \exp\left(-\frac{(q-q_1)^2 + (p-p_1)^2}{\hbar}\right) + \frac{1}{\hbar} \exp\left(-\frac{(q-q_2)^2 + (p-p_2)^2}{\hbar}\right)$, et le terme oscillant n'est pas présent: la fonction de Wigner reste positive et bimodale.

laquelle il faudrait renoncer à une description quantique. Je pense qu'une très grande majorité de physiciens adhère maintenant à ce point de vue, comme en témoigne par exemple l'essor de la cosmologie quantique! (D3)

Il faut donc, si l'on adopte ce point de vue, comprendre pourquoi le monde autour de nous nous semble indubitablement "classique" et non "quantique". En particulier nous devons préciser pourquoi le monde macroscopique nous semble si peu compatible avec le principe de superposition quantique : nous devrions voir des "chats de Schrödinger" partout !

Une première remarque est d'ordre pratique : il n'est sans doute pas facile de distinguer empiriquement un état pur $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{vivant}\rangle + |\text{mort}\rangle)$ d'un mélange statistique $\frac{1}{2}|\text{vivant}\rangle\langle\text{vivant}| + \frac{1}{2}|\text{mort}\rangle\langle\text{mort}|$. Les deux matrices densité correspondantes diffèrent par le terme $\frac{1}{2}[|\text{vivant}\rangle\langle\text{mort}| + |\text{mort}\rangle\langle\text{vivant}|]$

qui affecte peu la valeur moyenne d'une observable locale. En fait pouvoir détecter de telles superpositions d'états macroscopiquement distincts est une tâche difficile. Nous essaierons de donner des exemples où ceci est envisageable, dans le contexte du calcul quantique dit "topologique".

L'autre remarque, cruciale, est que de telles superpositions sont extrêmement fragiles, à cause du mécanisme dit de "décohérence". Ce mécanisme repose sur la prise en compte du fait que notre chat n'est pas la totalité de l'univers, et les molécules qui le composent sont couplées en permanence aux autres degrés de liberté de l'univers, que l'on appelle souvent dans ce contexte l'"environnement". Ainsi une superposition de deux états macroscopiquement distincts doit être modélisée par une fonction d'onde factorisée de la forme :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{vivant}\rangle + |\text{mort}\rangle) \otimes |\text{Env}\rangle \quad (1)$$

Or, c'est un fait "cinématique" essentiel, les états produits tensoriels sont extrêmement rares. Supposons pour illustrer ce point, que l'espace des états de notre système soit de dimension M et que celui de l'environnement soit de dimension N . L'espace des états du système complet s'identifie à l'espace projectif complexe de dimension $MN-1$ (puisque la phase globale d'une fonction d'onde est inobservable). Par contre, les états produits tensoriels forment une sous-variété algébrique de dimension $M+N-2$, car $x \otimes y = x' \otimes y'$ (N.E.C) si et seulement si x et x' d'une part et y et y' d'autre part, sont colinéaires. Les états factorisables sont donc en bijection avec le produit cartésien de $\mathbb{CP}^{M-1}$ et de $\mathbb{CP}^{N-1}$. La codimension de l'espace des états factorisables est donc égale à $(M-1)(N-1)$, et on voit qu'elle devient infinie si $N \rightarrow \infty$, comme on s'y attend pour un environnement macroscopique. On peut donc s'attendre à ce que, partant d'un état factorisé de la forme (1), le couplage du système et de son environnement fasse sortir la fonction d'onde $|\Psi(t)\rangle$ de cette sous-variété, sauf pour une classe très particulière d'Hamiltoniens non-génériques.

Pour le chat, il est donc physiquement raisonnable de supposer que l'interaction avec l'environnement produit, au bout d'un temps t dont nous venons qu'il est extrêmement court, un état non factorisable de la forme :

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{vivant}\rangle \otimes |\text{Env}(t)_V\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{mort}\rangle \otimes |\text{Env}(t)_M\rangle$$

Pour alléger les notations, nous écrivons ceci sous la forme :

(D4) $|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|a\rangle \otimes |X_a\rangle + |b\rangle \otimes |X_b\rangle]$

Pour mesurer la distance entre $|\Psi(t)\rangle$ et la sous-variété des états factorisables, il est commode d'examiner la matrice densité réduite du système. Dans la base $(|a\rangle, |b\rangle)$, celle-ci s'écrit:

$$\rho_{red} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \langle X_b | X_a \rangle \\ \langle X_a | X_b \rangle & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{on a supposé } \langle X_a | X_a \rangle = 1 = \langle X_b | X_b \rangle)$$

dont les valeurs propres sont $\frac{1}{2} (1 \pm |\langle X_a | X_b \rangle|)$

Le chat se trouve dans un état pur si et seulement si la plus grande valeur propre est égale à 1, donc si $|X_a\rangle$ et $|X_b\rangle$ sont colinéaires, et l'on retrouve pour le système chat + environnement un état factorisable.

Dès que $|X_a\rangle$ et $|X_b\rangle$ sont linéairement indépendants, l'état du chat est décrit par un mélange statistique. Dans la limite où $|X_a\rangle$ et $|X_b\rangle$ sont orthogonaux, l'entropie du chat est maximale puisque $S = \frac{1}{2} \ln 2$.

Si l'on peut considérer que $|X_a\rangle$ et $|X_b\rangle$ sont distribués aléatoirement (avec la contrainte d'être de norme 1), on voit que plus N est grande, plus ils ont de chance d'être orthogonaux. Posons $u = |\langle X_a | X_b \rangle|^2$.

Pour avons: $\langle u \rangle = \frac{1}{N}$
 $\langle u^2 \rangle = \frac{2}{N(N+1)}$

Plus précisément, la distribution de probabilité de u est:

$$P_N(u) = (N-1)(1-u)^{N-2}$$

dont on voit qu'elle tombe très rapidement à zéro pour $u > 0$ lorsque $N \gg 1$.

En réalité, les états $|X_a\rangle \equiv |Env(t)_v\rangle$ et $|X_b\rangle \equiv |Env(t)_n\rangle$ ne sont pas tirés au hasard, mais ils proviennent de l'évolution temporelle du système complet (chat + environnement) à partir de l'état factorisable (1).

Comme nous le verrons, le temps au bout duquel $|X_a\rangle$ et $|X_b\rangle$ deviennent pratiquement orthogonaux est typiquement beaucoup plus court que les temps caractéristiques de la dynamique du système. L'effet de décroissance est essentiellement dû au fait que, par suite du couplage entre le système et l'environnement, l'Hamiltonien effectif décrivant la dynamique de ce dernier pendant le processus de décroissance dépend de l'état du système. Avec une très bonne approximation, on peut donc écrire:

$$\begin{cases} |X_a(t)\rangle \simeq \exp(-i H_a^{env} t) |Env\rangle \\ |X_b(t)\rangle \simeq \exp(-i H_b^{env} t) |Env\rangle \end{cases}$$

où H_a^{env} (resp. H_b^{env}) est l'Hamiltonien "vu" par l'environnement lorsque le système est dans l'état $|a\rangle$ (resp. dans l'état $|b\rangle$).

Pour devons donc comprendre pourquoi le recouvrement

$$R(t) = \langle Env | e^{i H_b^{env} t} e^{-i H_a^{env} t} | Env \rangle$$

tend très rapidement vers zéro lorsque t augmente, dès que l'environnement est un système macroscopique. La mise en évidence de ce type de comportement

a fait notamment l'objet d'un article célèbre de P.W. Anderson, intitulé "Infrared catastrophe in Fermi gases with local scattering potentials", Phys. Rev. Lett. 18, 1048, (1967). Dans cet article, il s'agit d'évaluer le recouvrement entre un déterminant de Slater d'ondes planes (mer de Fermi non perturbée) et un déterminant de Slater avec le même nombre de fermions, mais constitué sur les états de diffusion en présence d'un potentiel localisé. Anderson montre que ce recouvrement est majoré par une quantité de la forme:

$$N^{-\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = \sum_{\ell \geq 0} \frac{(2\ell+1)}{3\pi^2} \sin^2 \delta_\ell, \quad N: \text{nombre de particules}$$

où δ_ℓ est le déphasage induit par le potentiel localisé dans le canal de moment angulaire $\ell\hbar$. Le recouvrement tend vers zéro à la limite $N \rightarrow \infty$, pour un potentiel localisé arbitraire.

Bien que cette conclusion ait été établie pour le recouvrement entre deux états fondamentaux associés à deux Hamiltoniens distincts, on peut l'étendre assez facilement à des situations dynamiques. Par exemple, si H_a^{env} et H_b^{env} sont deux opérateurs à une particule, et si $|E_{\text{env}}\rangle$ est un état de particules indépendantes (déterminant de Slater pour des Fermions), alors les deux états de l'environnement $|\chi_a(t)\rangle$ et $|\chi_b(t)\rangle$ au temps t , conditionnés à l'état du système, sont aussi des états de particules indépendantes, constitués sur des jeux d'états à une particule distincts. Le raisonnement d'Anderson montre que $\langle \chi_a(t) | \chi_b(t) \rangle \rightarrow 0$ pour t fini, dès que $N \rightarrow \infty$.

Toutefois, nous avons besoin ici du comportement à N grand mais fixé, en fonction du temps. Pour aller plus loin, il est utile de choisir un modèle simple mais suggestif. Considérons un environnement constitué par un gaz de fermions chiraux en dimension $D=1$. L'Hamiltonien s'écrit:

$$H_0^{\text{env}} = v_F \int_0^L dx : \psi^\dagger(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} : = \sum_{k \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}} v_F k : c_k^\dagger c_k :$$

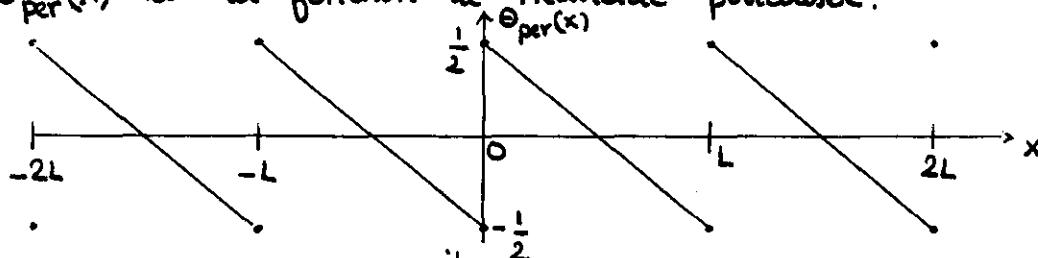
Il sera commode d'introduire les opérateurs bosoniques $\rho(q) \equiv \sum_k c_{k+q}^\dagger c_k$. En présence de la mer de Dirac, on observe que:

$$[\rho(-q), \rho(q')] = \delta_{qq'} \frac{qL}{2\pi} \quad \text{et} \quad H_0 = 2\pi \frac{v_F}{L} \sum_{q>0} \rho(q) \rho(-q)$$

Supposons que le couplage système-environnement puisse se modéliser par un déphasage $\delta_{a,b}$ dépendant de l'état du système, pour ces fermions chiraux.

En présence d'un tel déphasage, les ondes planes e^{ikx} ($k \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}$) sont modifiées et multipliées par le facteur $\exp[i2\delta \Theta_{\text{per}}(x)]$

où $\Theta_{\text{per}}(x)$ est la fonction de Heaviside périodisée:



$$\frac{d}{dx} \Theta_{\text{per}}(x) = \delta_{\text{per}}(x) = \frac{1}{L} \sum_{k \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}} e^{ikx} \quad \text{donc} \quad \Theta_{\text{per}}(x) = \sum_{k \neq 0} \frac{e^{ikx}}{ikL}$$

L'opérateur qui multiplie une fonction L périodique de x par $i2\delta \Theta_{\text{per}}(x)$ s'écrit donc:

$$\sum_{k \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}} \sum_{q \neq 0} \frac{2\delta}{qL} |k+q\rangle \langle k|$$

⑤6 Dans l'espace de Fock des fermions chiraux, l'opérateur U_δ qui déphase les états à une particule s'exprime donc comme:

$$U_\delta = \exp \left\{ \sum_{q \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}} \frac{2\delta}{qL} \epsilon(q) \right\}$$

Autrement dit, l'application d'un tel déphasage produit des états cohérents dans la représentation bosonique. En oubliant la variation de l'énergie du fondamental induite par cette perturbation locale, il est naturel de définir cette dernière par la substitution:

$$H_0 \rightarrow H_\delta = U_\delta H_0 U_\delta^{-1}$$

Le recouvrement $R(t)$ qui contrôle la décohérence est donc

$$R(t) = \langle \text{Env} | U_\delta e^{iH_0 t} U_\delta^{-1} U_\delta e^{-iH_0 t} U_\delta^{-1} | \text{Env} \rangle$$

Ce genre de calcul est standard. Il est commode de mettre le produit "d'opérateurs de vertex" dans l'ordre normal (créateurs à gauche, annihilateurs à droite) en utilisant la formule de Glauber

$$(e^{C+A} = e^{\frac{1}{2}[A,C]} e^C e^A \text{ si } [A,C] \text{ commute avec } A \text{ et avec } C).$$

Pour terminer le calcul, nous supposons que l'environnement est initialement dans un état d'équilibre thermique à température T . Dans ce cas, pour chaque mode q :

$$\langle \exp(\alpha_q \epsilon(q)) \exp(\beta_q \epsilon(-q)) \rangle = \exp \left\{ \frac{qL}{2\pi} \frac{\alpha_q \beta_q}{\exp(\frac{\hbar v_F q}{k_B T}) - 1} \right\} \quad (q > 0)$$

On obtient: $R(t) = R_Q(t) R_T(t)$ où

$R_Q(t)$ est dû à la mise en ordre normal. On peut le qualifier de facteur de décohérence quantique, car il est indépendant de la température.

$$R_Q(t) = \exp \left\{ -\frac{2}{\pi} \sum_{q>0} \frac{(\delta_a - \delta_b)^2 (1 - \cos(v_F q t)) + i(\delta_a^2 - \delta_b^2) \sin(v_F q t)}{qL} \right\}$$

$R_T(t)$ provient des moyennes thermiques d'un produit normal d'opérateurs de vertex. Il est égal à 1 dans la limite de température nulle. On peut donc l'associer aux excitations déjà présentes dans l'environnement lorsqu'on le couple au système.

$$R_T(t) = \exp \left\{ -\frac{4}{\pi} (\delta_a - \delta_b)^2 \sum_{q>0} \frac{1 - \cos(v_F q t)}{qL (\exp(\hbar v_F q / k_B T) - 1)} \right\}$$

Les modes qui contribuent à la décohérence sont ceux tels que $v_F q t \gtrsim \pi$. Aux temps courts ($t \ll \hbar / k_B T$), ces modes restent dans l'état fondamental, car leur énergie d'excitation $\hbar v_F q$ est plus grande que $k_B T$. La décohérence est donc dominée par le facteur quantique.

$$R_Q(t) \simeq \left(\omega_{\text{Max}} t \right)^{-\left(\frac{\delta_a - \delta_b}{\pi} \right)^2}$$

où nous avons eu besoin d'introduire une fréquence de coupure ω_{Max} pour régulariser la somme sur les modes de l'environnement.

Dans la limite des temps "longs", la décroissance est portée pour l'essentiel par le facteur $R_T(t)$, en particulier par les modes thermiquement excités tels que: $\frac{\pi}{t} \lesssim \nu_F q \lesssim \frac{k_B T}{\hbar}$. Pour ces modes, la statistique de Bose-Einstein se confond avec la distribution de Maxwell-Boltzmann, ce qui donne:

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$R_T(t) \simeq \exp\left\{-\frac{(\delta_a - \delta_b)^2}{\pi} \frac{k_B T}{\hbar} t\right\}$$

A cause de la petitesse de la constante de Planck, on trouve donc des temps de décroissance extrêmement petits !

Décroissance des systèmes ohmiques

Les comportements mis en évidence pour $R_Q(t)$ et $R_T(t)$ sont caractéristiques de la classe des systèmes ohmiques, c'est à dire des systèmes pour lesquels le couplage avec l'environnement induit une force de frottement proportionnelle à la vitesse. Précisons ce point. Soit une particule de masse M se déplaçant sur une droite, avec une coordonnée X et une impulsion P . On couple cette particule à un bain d'oscillateurs harmoniques (q_α, p_α) . L'Hamiltonien du système complet est:

$$H = \frac{P^2}{2M} + \sum_{\alpha} \left\{ \frac{1}{2} \omega_{\alpha}^2 p_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \omega_{\alpha}^2 \left(q_{\alpha} + \frac{\lambda_{\alpha}}{\omega_{\alpha}} X \right)^2 \right\}$$

La forme du couplage est choisie de sorte que le minimum de l'énergie potentielle est zéro, quelle que soit la position X de la particule. A la limite continue, la répartition des ω_{α} devient une densité spectrale $g(\omega)$, et on suppose que λ_{α} devient une fonction $\lambda(\omega)$. Montrons que si $g(\omega)$ et $\lambda(\omega)$ sont bien choisies, cet environnement produit une force de frottement fluide sur la particule proportionnelle à sa vitesse. L'idée est d'éliminer les coordonnées des oscillateurs du bain dans les équations du mouvement:

$$\ddot{q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha} = -\lambda_{\alpha} \omega_{\alpha} X(t) \quad \rightarrow \quad q_{\alpha}(t) = A_{\alpha} \cos(\omega_{\alpha} t) + B_{\alpha} \sin(\omega_{\alpha} t) - \lambda_{\alpha} \int_{-\infty}^t dt' \sin(\omega_{\alpha}(t-t')) X(t')$$

$$M \ddot{X} = - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} q_{\alpha} - \left(\sum_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha}^2}{\omega_{\alpha}} \right) X$$

Si l'on moyenne cette équation par rapport aux conditions initiales des oscillateurs du bain (donc par rapport à A_{α}, B_{α}), on obtient

$$M \langle \ddot{X} \rangle = \int_{-\infty}^t dt' \left\{ \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^2 \sin(\omega_{\alpha}(t-t')) \right\} \langle X(t') \rangle - \left(\sum_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha}^2}{\omega_{\alpha}} \right) \langle X(t) \rangle$$

Une intégration par parties donne:

$$M \langle \ddot{X} \rangle = - \int_{-\infty}^t dt' \left\{ \sum_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha}^2}{\omega_{\alpha}} \cos(\omega_{\alpha}(t-t')) \right\} \dot{X}(t')$$

or $\sum_{\alpha} \frac{\lambda_{\alpha}^2}{\omega_{\alpha}} \cos[\omega_{\alpha}(t-t')] \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{g(\omega) \lambda(\omega)^2}{2|\omega|} e^{i\omega(t-t')} = 2\gamma \delta(t-t')$

à condition que $g(\omega) \lambda(\omega)^2 = 2 \frac{\gamma}{\omega}$ Le comportement linéaire en ω

(dans la limite des basses fréquences) est typique des systèmes ohmiques.

(D8)

Pour préciser l'analogie avec le modèle du gaz de fermions unidimensionnel, il est utile de construire l'opérateur de vertex U_x qui envoie le fondamental des oscillateurs libres sur le nouveau fondamental, lorsque x est considéré comme un paramètre fixé. Pour cela, notons que

$$H_x^{\text{env}} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \omega_{\alpha} (p_{\alpha}^2 + q_{\alpha}^2) + \lambda_{\alpha} q_{\alpha} x \quad \text{mais} \quad q_{\alpha} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (a_{\alpha} + a_{\alpha}^{\dagger})$$

$$H_x^{\text{env}} = \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} (a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} + \frac{1}{2}) + \sqrt{\frac{\hbar}{2}} x \lambda_{\alpha} (a_{\alpha} + a_{\alpha}^{\dagger})$$

$$H_x^{\text{env}} = \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} (a_{\alpha}^{\dagger} + \frac{x}{\sqrt{2\hbar}} \frac{\lambda_{\alpha}}{\omega_{\alpha}}) (a_{\alpha} + \frac{x}{\sqrt{2\hbar}} \frac{\lambda_{\alpha}}{\omega_{\alpha}}) + \text{cte.}$$

$$\text{D'où : } U_x = \exp \left\{ \sum_{\alpha} \frac{x}{\sqrt{2\hbar}} \frac{\lambda_{\alpha}}{\omega_{\alpha}} (a_{\alpha} - a_{\alpha}^{\dagger}) \right\}$$

Pour pouvoir comparer U_S et U_x , il est pratique de prendre une limite continue, les sommes discrètes étant remplacées par des intégrales sur les fréquences positives. Dans le continu, on normalise les opérateurs $a_{\omega}, a_{\omega}^{\dagger}$ de sorte que $[a_{\omega}, a_{\omega'}^{\dagger}] = 2\pi \delta(\omega - \omega')$

$$\text{Il vient : } U_S = \exp \left(\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}} \delta (a_{\omega}^{\dagger} - a_{\omega}) \right)$$

$$\text{et } U_x = \exp \left(\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{2\gamma}{\hbar\omega}} x (a_{\omega} - a_{\omega}^{\dagger}) \right)$$

Les expressions sont identiques, pourvu que $\delta = -\sqrt{\frac{\pi\gamma}{\hbar}} x$

(on vérifie que la quantité $\gamma x^2/\hbar$ est sans dimension).

Si l'on prépare un "chat de Schrödinger" avec la particule en x_a et en x_b , on peut donc transposer les résultats obtenus pour les fermions chiraux et

$$\begin{cases} R_Q(t) \sim (\omega_{\text{max}} t)^{-\frac{\gamma(\Delta x)^2}{\pi\hbar}} \\ R_T(t) \sim \exp \left(-\frac{\gamma(\Delta x)^2}{\hbar} \frac{k_B T}{\hbar} t \right) \end{cases}$$

Ordres de grandeur

Prenons la particule Brownienne discutée par Einstein dans son célèbre article de 1905. $\gamma = 6\pi\mu a$ où μ est la viscosité dynamique du fluide, et a le rayon de la particule, supposée sphérique. Pour l'eau à température ambiante, $\mu = 1.35 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m.s}$. Prenons $a = 0.5 \mu\text{m} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

Le facteur $\frac{\gamma(\Delta x)^2}{\hbar}$, pour un chat de Schrödinger de taille modeste ($\Delta x = 1 \mu\text{m}$) vaut approximativement $1.2 \cdot 10^{14}$, ce qui est gigantesque.

Compte tenu de la valeur de $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, si l'on se place à température ambiante ($T = 300 \text{ K}$), on obtient un temps de décoherence extrêmement petit, de $2 \cdot 10^{-28} \text{ s}$, qui n'a bien sûr aucune chance d'être observable !

Remarque sur le calcul du facteur $R(t)$: vision "classique" de la décohérence

$R(t)$ se présente comme la moyenne sur l'état initial de l'environnement du produit de deux opérateurs d'évolution :

$$R(t) = \langle \exp(i H_b t / \hbar) \exp(-i H_a t / \hbar) \rangle$$

Tout se passe comme si l'environnement évoluait de 0 à t avec l'Hamiltonien H_a , puis de t à 0 (en renversant le sens du temps), avec l'Hamiltonien H_b . Si $H_a = H_b$, on doit clairement revenir au point de départ. Si H_a et H_b sont légèrement différents (ce qui se produit en cas d'un faible couplage entre le système et l'environnement), la composition des deux évolutions temporelles inversées ne reproduit plus l'état initial. Sous cette formulation, on voit qu'il peut être fructueux de comparer la situation classique (c'est le problème de l'écho de Loschmidt) et la situation quantique. On s'attend qualitativement à de grandes différences selon que la dynamique de l'environnement est intégrable ou non. Pour l'instant, nous avons regardé un cas très particulier : celui d'environnements équivalents à une collection d'oscillateurs. Dans ce cas, la dynamique classique associée à H_a et à H_b correspond à des transformations affines sur l'espace des phases. Il est intéressant de regarder dans ce cas très simple ce que donne cette composition de deux transformations canoniques linéaires.

Notons que l'on peut obtenir dans ce cas l'évolution classique à partir de l'évolution des opérateurs en représentation de Heisenberg. Nous avons :

$$H_S = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left[\hbar \omega a_\omega^\dagger a_\omega - \hbar \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \delta (a_\omega + a_\omega^\dagger) + \text{c.c.} \right] \quad (\text{version continue})$$

Pendant la première phase ($0 \leq t' \leq t$), nous avons les équations de Heisenberg :

$$\frac{d a_\omega^\dagger(t')}{dt'} = i\omega a_\omega^\dagger(t') - i\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}} \delta_a \quad \text{d'où} \quad a_\omega^\dagger(t) = e^{i\omega t} a_\omega^\dagger(0) + \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}} \delta_a (1 - e^{i\omega t})$$

Dans la seconde phase ($t \leq t' \leq 2t$), il faut changer le sens du temps et remplacer δ_a par δ_b , d'où :

$$a_\omega^\dagger(2t) = e^{-i\omega t} a_\omega^\dagger(t) + \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}} \delta_b (1 - e^{-i\omega t})$$

En substituant la valeur de $a_\omega^\dagger(t)$, nous obtenons, pour l'application de Loschmidt :

$$\begin{aligned} a_\omega^\dagger(2t) &= a_\omega^\dagger(0) + \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}} (\delta_b - \delta_a) (1 - e^{-i\omega t}) \\ a_\omega(2t) &= a_\omega(0) + \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}} (\delta_b - \delta_a) (1 - e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

On voit que cette transformation se réduit à l'identité si $t=0$ ou si $\delta_a = \delta_b$. Comme le couplage au système est linéaire dans les coordonnées des oscillateurs de l'environnement, cette application se réduit à une translation d'espace des phases. On peut la réaliser quantiquement (au sens où $a_\omega^\dagger(2t) = V(t)^{-1} a_\omega^\dagger(t) V(t)$) par l'opérateur unitaire $V(t)$:

$$V(t) = \exp \left\{ \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi\omega}} (\delta_b - \delta_a) [(1 - e^{i\omega t}) a_\omega^\dagger - (1 - e^{-i\omega t}) a_\omega] \right\}$$

On peut vérifier par un calcul direct que $V(t)$ ne diffère de l'opérateur quantique exact $\exp(i H_b t / \hbar) \exp(-i H_a t / \hbar) = U_b \exp(i H_a t / \hbar) U_b^{-1} U_a \exp(-i H_a t / \hbar) U_a^{-1}$ que par un facteur de phase global, si bien que $\langle V(t) \rangle = |R(t)|$.

(D10) Il est rare que l'on ait besoin explicitement de ce facteur de phase, donc la démarche consistant à évaluer l'application de Loschmidt classique (qui est une transformation canonique), puis à la "quantifier", est assez fructueuse. Nous l'appliquons bientôt au cas d'un couplage quadratique ("paramétrique") entre le système et les coordonnées des oscillateurs de l'environnement. D'un point de vue mathématique, les facteurs de phase indiquent que la représentation des transformations canoniques affines classiques par des opérateurs unitaires quantiques est nécessairement projective. Pour avoir une "vraie" représentation, il faut (comme pour le spin et le groupe des rotations), passer au recouvrement universel du groupe des transformations canoniques linéaires classiques, et l'on obtient la représentation métaplectique. Pour plus d'informations sur cet aspect mathématique, on peut consulter le livre de V. Guillemin et Sh. Stenzel, "Symplectic techniques in physics" (chapitre I).

Avant d'aborder le couplage paramétrique à un environnement gaussien, il est intéressant de se donner une image intuitive de l'application de Loschmidt classique pour ce couplage linéaire. Pour cela, il est commode de voir l'environnement comme un champ scalaire en $D=1$ (limite continue d'une corde vibrante ou d'une chaîne élastique). C'est un exercice laissé au lecteur, de vérifier que l'on obtient les mêmes propriétés de décroissance avec l'Hamiltonien :

$$H_\alpha = \frac{v}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\Pi(x)^2 + (\frac{\partial \Phi}{\partial x})^2) dx + v\alpha \partial_x \Phi(0) \quad \text{avec } \alpha = \left(\frac{2\hbar}{\pi}\right)^{1/2} \delta.$$

Le couplage local en $\partial_x \Phi(0)$ doit comporter une dérivée pour que nous retrouvions le cas ohmique, car si l'on pose $[\Phi(x), \Pi(x')] = i\hbar \delta(x-x')$, nous voyons que $[\Phi(x)] = [\hbar]^{1/2}$, et le seul moyen de dédimensionner la constante de couplage avec à notre disposition $\hbar$ et la vitesse de propagation v est de prendre une dérivée spatiale.

La solution générale des équations de Hamilton est : (sur l'intervalle $[0; t]$)

$$\begin{cases} \Phi(x; t') = -\alpha_a \Theta(x) + f_a(x-vt') + g_a(x+vt') \\ \Pi(x; t') = -f'_a(x-vt') + g'_a(x+vt') \end{cases} \quad (g' = \frac{df}{dx})$$

Puis, sur l'intervalle $[t; 2t]$:

$$\begin{cases} \Phi(x; t') = -\alpha_b \Theta(x) + f_b(x-vt') + g_b(x+vt') \\ \Pi(x; t') = f'_b(x-vt') - g'_b(x+vt') \end{cases}$$

On vérifie que si $\alpha_a = \alpha_b$, alors $\begin{cases} \Phi(x; 2t) = \Phi(x; 0) \\ \Pi(x; 2t) = \Pi(x; 0) \end{cases}$.

Comme on s'attend à ce que l'application de Loschmidt soit une translation des champs classiques Φ et Π , il suffit de propager une solution particulière. On obtient alors :

$$\begin{cases} \Phi(x; 2t) - \Phi(x; 0) = \frac{\alpha_b - \alpha_a}{2} (\Theta(x-vt) + \Theta(x+vt) - 2\Theta(x)) \\ \Pi(x; 2t) - \Pi(x; 0) = \frac{\alpha_b - \alpha_a}{2} (\delta(x-vt) - \delta(x+vt)) \end{cases}$$

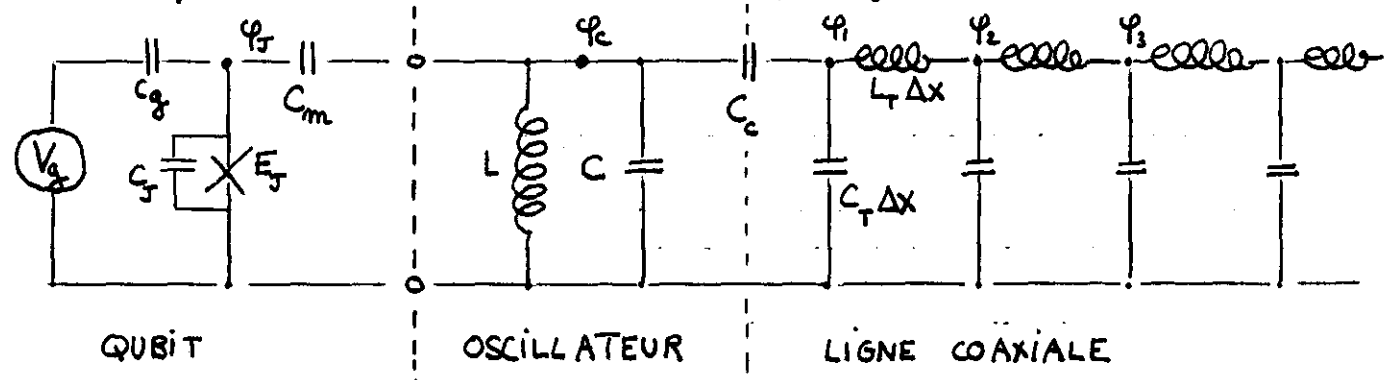
Si le champ $\Phi(x; t)$ est obtenu par bosonisation d'un système de fermions 1D, la densité locale de charge est proportionnelle à $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$: on aie donc un quadrupole avec des

charges fractionnaires proportionnelles à $\alpha_b - \alpha_a$: c'est une généralisation dynamique de la règle de somme de Friedel.

Décohérence par couplage paramétrique à un champ scalaire libre

On rencontre souvent ce type de décohérence lors de la mesure d'un système quantique à deux niveaux (qubit) couplé à un oscillateur. Selon l'état du qubit, les propriétés de l'oscillateur sont légèrement modifiées, ce que l'on peut détecter par une mesure dispersive, c'est à dire que l'on envoie un signal sur l'oscillateur, qui sera déphasé d'une manière sensible à l'état du qubit.

Thématiquement, on peut visualiser le dispositif de la manière suivante: (*)



$$H \approx \frac{1}{2C_{qb}} (q_J + C_g V_g)^2 + \frac{C_m}{C_{qb} C_{osc}} (q_J + C_g V_g) (q_c + q_1) + \frac{1}{2C_c} q_1^2 + \frac{1}{2C_{osc}} (q_c + q_1)^2 - E_J \cos \varphi_J + \frac{\varphi_c^2}{2L} + \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{q_{i+1}^2}{2C_T} + \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2}{2L_T} \right)$$

On a défini $C_{qb} = C_J + C_g + C_m$; $C_{osc} = C + C_m$, avec les hypothèses:

C_m, C_c et $\Delta x C_T$ négligeables devant les autres capacités C_g, C_J, C .

Les variables φ_j et q_j sont conjuguées : $[\varphi_j, q_{j'}] = i \delta_{jj'}$

q_j est la charge électrique portée par l'électrode j et φ_j est reliée à la tension locale V_j par $V_j = \frac{d\varphi_j}{dt}$

Pour l'île supraconductrice, on a coutume de choisir d'autres notations, car la charge qu'elle porte est quantifiée, en multiples entiers de $2e$, puisque les électrons sont liés par paires (paires de Cooper). Si la charge q_J est un multiple entier de $2e$, sa variable conjuguée φ_J est périodique. Il est naturel de choisir la période 2π (l'énergie Josephson s'exprime alors comme $-E_J \cos \varphi_J$), si bien que $q_J = \frac{2e}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi_J}$

On en déduit l'une des célèbres relations de Josephson: $\hbar \frac{d\varphi_J}{dt} = 2e V_J$

Si $\kappa = C_m / C_{osc}$ est très petit, on peut, en première approximation, traiter la boîte à paires de Cooper comme si elle était isolée. Supposons que E_J (liée à l'amplitude de passage par effet tunnel quantique d'une paire de Cooper à travers la jonction) soit petite devant l'énergie de charge $E_c = e^2 / 2C_{qb}$. Cet effet tunnel sera donc une perturbation.

(*) Cette figure et cette discussion sont largement inspirées de l'article : "Fast quantum limited readout of a superconducting qubit using a slow oscillator" by G. Johansson, L. Tornberg & C.M. Wilson, P.R. B. 74, 100504(R), (2006)

(D12)

Plaçons nous au point de dégénérescence entre l'état avec $n=0$ et l'état avec $n=1$ paire de Cooper dans la boîte ($\hat{n} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi_j}$).

Ceci est obtenu en négligeant la tension de grille V_g de sorte que $V_g = -e/C_g$. L'Hamiltonien du qubit isolé s'écrit donc:

$$H_{\text{qubit}} = 4E_C \left(\hat{n} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{E_J}{2} \sum_n (|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|)$$

Si $E_J = 0$, le fondamental est donc engendré par les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Un E_J petit lève cette dégénérescence, et l'on obtient les états propres approchés:

$$\begin{cases} |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) & E_+ = E_C - \frac{1}{2} E_J \\ |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) & E_- = E_C + \frac{1}{2} E_J \end{cases}$$

On a donc un Hamiltonien effectif $H_{\text{tot}} \approx E_C - \frac{1}{2} E_J \sigma^z$.

Lorsque le couplage $\kappa = C_m/C_{oc}$ n'est plus nul, l'Hamiltonien effectif, dans la base $(|0\rangle, |1\rangle)$ devient:

$$\begin{bmatrix} -2\frac{\kappa}{e} E_C (q_c + q_1) & -\frac{E_J}{2} \\ -\frac{E_J}{2} & 2\frac{\kappa}{e} E_C (q_c + q_1) \end{bmatrix} \quad (M)$$

Il faut imaginer que la quantité $q_c + q_1$ fluctue pour au moins deux raisons: les fluctuations quantiques de point zéro, et les fluctuations thermiques de l'oscillateur et de la chaîne coaxiale, toujours présentes; à quoi s'ajoutent éventuellement le signal de mesure envoyé le long de la ligne coaxiale. On veut se placer dans une limite dispersive: (par opposition à une excitation résonnante du qubit), c'est à dire que l'excitation doit se traduire par une variation de la différence en énergie entre les deux niveaux, et non pas par des transitions d'un niveau à l'autre. Ceci requiert que $2\frac{\kappa}{e} E_C \langle q_c + q_1 \rangle$ (restent petits par rapport à $\frac{E_J}{2}$).

$$\text{et } 2\frac{\kappa}{e} E_C \sqrt{\langle (q_c + q_1)^2 \rangle - \langle q_c + q_1 \rangle^2}$$

Si cette condition est satisfaite, on remplace (M) par une matrice diagonale:

$$H_{\text{tot}} \approx -\frac{E_J}{2} \sigma^z - \frac{g_c}{2} \sigma^z \otimes (q_c + q_1)^2 \quad \text{avec } g_c = \frac{8\kappa^2 E_C^2}{e^2 E_J}$$

On voit donc que la contribution électrostatique à l'énergie de l'oscillateur $\frac{1}{2C_{oc}} (q_c + q_1)^2$ devient $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_{oc}} - g_c \sigma^z \right) \otimes (q_c + q_1)^2$.

comme si la capacité de l'oscillateur, en présence du qubit était:

$$C_{oc, \text{eff}} = \frac{C_{oc}}{1 - g_c C_{oc} \sigma^z} \approx C_{oc} + g_c C_{oc}^2 \sigma^z$$

Ceci fournit la base pour une mesure dispersive du qubit. Notons qu'il s'agit, du point de vue de l'oscillateur et de la ligne coaxiale, d'une modification d'un terme quadratique de l'Hamiltonien, et non plus d'un forçage linéaire comme discuté précédemment. On peut donc parler de mécanique "paramétrique", par analogie avec l'excitation

paramétrique d'un oscillateur qui consiste à faire varier périodiquement sa fréquence propre (c'est ainsi que fonctionne une balance à pèse !). (D13)

Il s'avère qu'en général, le calcul de la décroissance paramétrique est nettement plus ardu que celui de la décroissance induite par forçage linéaire des variables de l'environnement (même si celui-ci reste gaussien!). La difficulté n'est pas tellement conceptuelle, mais pratique. Pour le reste de cette section, nous allons d'abord aborder ce calcul pour une caricature d'environnement, réduit à un seul oscillateur!

A vrai dire, si l'effet du couplage système-oscillateur est de seulement modifier la fréquence de l'oscillateur, typiquement

$$H_a = \frac{\hbar \omega_a}{2} (a^\dagger a + 1/2) \quad ; \quad H_b = \frac{\hbar \omega_b}{2} (a^\dagger a + 1/2)$$

et l'application de Loschmidt $V(t) = \exp(i H_b t / \hbar) \exp(-i H_a t / \hbar) = \exp[i(\omega_b - \omega_a)t a^\dagger a]$

commute avec l'Hamiltonien $H_0 = \frac{\hbar \omega_0}{2} (a^\dagger a + 1/2)$ de l'oscillateur. Si

celui-ci est initialement dans l'état $\rho_0 = \sum_n P_n |n\rangle\langle n|$, stationnaire pour H_0 , alors le facteur de décroissance:

$$\langle V(t) \rangle = \text{Trace}(\rho_0 V(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \exp(i(\omega_b - \omega_a)t n)$$

est périodique, avec la période $\frac{2\pi}{\omega_b - \omega_a}$. On pourrait avoir une décroissance, pour une

collection d'oscillateurs, si $\omega_b - \omega_a$ varie d'un oscillateur à l'autre: on aurait simplement un brouillage entre toutes ces phases. En réalité, ce mécanisme n'est pas le plus important. On peut s'en douter en revenant au phénomène de l'excitation paramétrique. Si l'on a un Hamiltonien dépendant du temps de la forme $H(t) = \frac{\hbar \omega_0(t)}{2} a^\dagger a$, la quantité $a^\dagger a$

reste conservée, et il n'y a pas de possibilité d'amplification, même pour $\omega_0(t)$ périodique et satisfaisant la condition habituelle $T_{\text{exc}} = \frac{n}{2} T_0$ ($n \in \mathbb{N}$), (T_0 période de l'oscillateur non perturbé et T_{exc} période de la fonction $\omega_0(t)$)!

Le mécanisme d'amplification requiert la non-conservation de $a^\dagger a$, et donc la modification des trajectoires classiques dans le plan (X, P) lorsque le paramètre imposé de l'extérieur change. Pour une valeur fixée du paramètre, ces trajectoires sont des ellipses d'excentricité fixée, et dont les longueurs des axes principaux sont proportionnels à l'énergie. Il est donc particulièrement intéressant de considérer une famille d'Hamiltoniens à un paramètre, pour laquelle la fréquence est maintenue constante, mais pour laquelle l'excentricité peut prendre une valeur arbitraire. Pour simplifier, nous supposons que les axes principaux sont le long de $X=0$ ou $P=0$.

Pour cela, considérons la transformation de Bogoliubov $U(\theta)$ définie par l'action suivante sur les opérateurs a et $a^\dagger$:

$$\begin{cases} U(\theta) a^\dagger U(\theta)^{-1} = \cosh \theta a^\dagger + \sinh \theta a \\ U(\theta) a U(\theta)^{-1} = \cosh \theta a + \sinh \theta a^\dagger \end{cases}$$

Une telle transformation est unitaire, car elle préserve la relation de commutation $[a, a^\dagger] = 1$. Nous verrons un peu plus loin comment décrire plus explicitement son action sur l'espace des états de l'oscillateur.

(D14)

Posons $H_0 = \frac{\hbar \omega_0}{2} (a^\dagger a + a a^\dagger)$ et $H(\theta) = U(\theta) H_0 U(\theta)^{-1}$

$H(\theta)$ a donc un spectre indépendant de θ . Un petit calcul donne:

$$H(\theta) = \frac{\hbar \omega_0}{2} [\cosh(2\theta) (a^\dagger a + a a^\dagger) + \sinh(2\theta) (a^\dagger a^\dagger + a a)]$$

Or, comme $a = (X + iP)/\sqrt{2\hbar}$ et $a^\dagger = (X - iP)/\sqrt{2\hbar}$:

$$\hbar (a^\dagger a + a a^\dagger) = X^2 + P^2 \quad \text{et} \quad \hbar (a^\dagger a^\dagger + a a) = X^2 - P^2$$

soit $H(\theta) = \frac{\omega_0}{2} (e^{2\theta} X^2 + e^{-2\theta} P^2)$

Evaluons l'application de Loschmidt $V(t) = \exp(i H(\theta_b) t / \hbar) \exp(-i H(\theta_a) t / \hbar)$

Comme expliqué précédemment, il est plus simple de faire le calcul "classiquement", c'est à dire de regarder l'action de $V(t)$ (par conjugaison) sur les opérateurs a et $a^\dagger$

Petite remarque:

en faisant ce genre de calcul, il y a un petit risque d'erreur si $V(t)$ se présente comme un produit de deux évolutions $V(t) \equiv V_2 V_1$. L'action par conjugaison sur une observable M est $M(t) = V_1^{-1} V_2^{-1} M V_2 V_1$, donc on conjugue d'abord par V_2 et ensuite par V_1 . Ceci semble en contradiction avec l'intuition d'une dynamique classique, où on applique d'abord la transformation 1 et ensuite la 2. En fait, il faut plutôt voir l'action de conjugaison non pas comme une action sur les opérateurs de l'espace des états, mais sur les valeurs moyennes (qui ont un lien direct avec la mécanique classique). Imaginons en effet une collection d'opérateurs (A_j) stable pour les conjugaisons par V_1 et V_2 . Introduisons les matrices $R^{(1)}$ et $R^{(2)}$ par :

$$\begin{cases} V_1^{-1} A_i V_1 = \sum_j R_{ij}^{(1)} A_j \\ V_2^{-1} A_i V_2 = \sum_j R_{ij}^{(2)} A_j \end{cases}$$

C'est ce que j'appelle appliquer une transformation sur les valeurs moyennes. Dans ce cas:

$$V_1^{-1} V_2^{-1} A_i V_2 V_1 = \sum_{j,k} R_{ij}^{(2)} R_{jk}^{(1)} A_k = \sum_k (R^{(2)} R^{(1)})_{ik} A_k$$

et les deux applications se composent dans le sens attendu! L'autre point de vue consiste à voir les A_i comme des vecteurs de base d'un sous-espace de l'espace des opérateurs agissant sur l'espace des états, et l'action de conjugaison par V_1 et V_2 dans ce sous-espace sont représentées respectivement par les matrices $R^{(1)T}$ et $R^{(2)T}$ qui se composent en sens inverse! J'ai appris (expérimentalement!) que ce genre de précision n'est pas inutile lorsque l'on effectue des calculs concrets!

On trouve :

$$\begin{pmatrix} a^\dagger(t) \\ a(t) \end{pmatrix} = e^{i H_0 t / \hbar} \begin{pmatrix} a^\dagger \\ a \end{pmatrix} e^{-i H_0 t / \hbar} = \begin{pmatrix} e^{i \omega_0 t} \cosh^2 \theta & -e^{-i \omega_0 t} \sinh^2 \theta \\ -2i \sin(\omega_0 t) \cosh \theta \sinh \theta & e^{-i \omega_0 t} \cosh^2 \theta - e^{i \omega_0 t} \sinh^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger \\ a \end{pmatrix}$$

Le calcul n'est pas difficile, voici une façon assez rapide de le faire:

$$a^{\dagger}(t) = U(\theta) e^{iH_0 t/\hbar} U(\theta)^{-1} a^{\dagger} U(\theta) e^{-iH_0 t/\hbar} U(\theta)^{-1}$$

$$a^{\dagger}(t) = U(\theta) e^{iH_0 t/\hbar} (ch\theta a^{\dagger} - sh\theta a) e^{-iH_0 t/\hbar} U(\theta)^{-1}$$

$$a^{\dagger}(t) = ch\theta e^{i\omega_0 t} U(\theta) a^{\dagger} U(\theta)^{-1} - sh\theta e^{-i\omega_0 t} U(\theta) a U(\theta)^{-1}$$

$$a^{\dagger}(t) = e^{i\omega_0 t} ch\theta (ch\theta a^{\dagger} + sh\theta a) - e^{-i\omega_0 t} sh\theta (sh\theta a^{\dagger} + ch\theta a)$$

$$a^{\dagger}(t) = (ch^2\theta e^{i\omega_0 t} - sh^2\theta e^{-i\omega_0 t}) a^{\dagger} + 2i \sin(\omega_0 t) ch\theta sh\theta a$$

On a des transformations de la forme: $\begin{pmatrix} a^{\dagger}(t) \\ a(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{\dagger} \\ a \end{pmatrix}$

avec $|\lambda|^2 - |\mu|^2 = 1$. Il s'agit d'un groupe à 3 paramètres continus, isomorphe au groupe $SL(2; \mathbb{R})$ des transformations canoniques linéaires du plan (X, P) . Pour un seul degré de liberté, la condition de préserver le crochet de Poisson est équivalente à la condition d'un déterminant unité.

Pour l'application de Loschmidt $v(t) = \exp(iH(\theta_a)t/\hbar) \exp(-iH(\theta_b)t/\hbar)$, le flot classique associé correspond aux valeurs suivantes de λ et μ :

$$\begin{cases} \lambda = 1 + 2 \sin^2(\omega_0 t) sh^2(\theta_a - \theta_b) + i \sin(2\omega_0 t) sh(\theta_a - \theta_b) sh(\theta_a + \theta_b) \\ \mu = 2 \sin^2(\omega_0 t) sh(\theta_a - \theta_b) + i \sin(2\omega_0 t) sh(\theta_a - \theta_b) ch(\theta_a + \theta_b) \end{cases}$$

On retrouve la propriété attendue que $\lambda=1$ et $\mu=0$ si $t=0$ ou si $\theta_a = \theta_b$.

Valeur moyenne de l'opérateur de Loschmidt sur un état thermique

Commençons par expliciter la matrice densité initiale de l'oscillateur. A l'équilibre thermique à température T ($\beta = 1/k_B T$), elle est proportionnelle à $\exp(-\beta H_0)$. Il est bien connu que cette matrice densité est Gaussienne:

$$\rho_0(X, X') = \left[\frac{2\hbar\beta}{\pi} \right]^{1/2} \exp \left\{ - \frac{(X^2 + X'^2) ch(\beta\hbar\omega_0) - 2XX'}{2\hbar sh(\beta\hbar\omega_0)} \right\} \quad (\beta = \frac{1}{k_B T})$$

On vérifie que $\text{Tr} \rho_0 = 1$ et que $\text{Tr}(\rho_0 \hat{X}^2) = \frac{\hbar}{2} \coth(\beta\hbar\omega_0/2)$ qui est le résultat attendu pour un oscillateur à l'équilibre thermique.

Pour l'opérateur d'évolution, nous avons le propagateur:

$$\langle x | e^{-iH(\theta)t/\hbar} | x' \rangle \equiv G_{\theta}(x, x'; t) = e^{-i\frac{\pi}{2}N_t} \frac{e^{\theta}}{\sqrt{i\hbar \sin(\omega_0 t)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{e^{2\theta} [(X^2 + X'^2) \cos(\omega_0 t) - 2XX']}{2 \sin(\omega_0 t)} \right\}$$

N_t est un entier, donné par la partie entière de $\frac{\omega_0 t}{\pi}$: il est incrément

à chaque demi-période de l'oscillateur. La demi-période a cette particularité que toute trajectoire classique commençant en X à $t=0$ passe en $-X$ en $\omega_0 t = \pi$. On a donc un phénomène de focalisation des trajectoires. Dans le langage de l'optique géométrique, X et $-X$ sont alors une paire de points conjugués.

Cette formule peut s'obtenir par exemple par une intégrale de chemins.

(16) La forme quadratique dans l'exponentielle n'est rien d'autre que $i \frac{S(x, x'; t)}{\hbar}$ où $S(x, x'; t)$ est l'action le long de la trajectoire classique qui part de x' à $t=0$ pour atteindre x au temps t .

On peut mettre en fait le propagateur sous la forme:

$$G(x; x'; t) = \frac{e^{-i\pi N_t}}{\sqrt{i\hbar}} \sqrt{\left| \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x'} \right|} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S(x, x'; t) \right\}$$

C'est ce que Martin Gutzwiller appelle le "propagateur quasi-classique". (voir son livre "Chaos in Classical and Quantum mechanics" Springer-Verlag, (1980), en particulier la section 12.5)

Pour un Hamiltonien quelconque, c'est une expression approchée, valable dans la limite $\hbar \rightarrow 0$. On peut la voir comme le résultat de l'évaluation de l'intégrale de chemins de Feynman par la méthode de la phase stationnaire. Le terme en $\sqrt{\left| \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x'} \right|}$ provient des fluctuations gaussiennes autour de la

trajectoire classique. Dans le cas d'un Hamiltonien quadratique, ces fluctuations gaussiennes donnent le résultat exact! Il faut juste faire attention à la phase globale. N_t donne le nombre de points conjugués avec la condition initiale x' dans l'intervalle de temps $]0, t[$. Pour un point conjugué x , on a $\frac{\partial x}{\partial p'} = 0$ où p' est l'impulsion initiale.

Mais comme $p' = -\frac{\partial S}{\partial x'}$, on voit que $-\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial x'}$ diverge pour une

paire de points conjugués. Du point de vue de l'intégrale fonctionnelle, chaque nouveau point conjugué correspond à une nouvelle valeur propre de la matrice Hessienne (dérivée seconde de l'action dans l'espace des fonctions $t \mapsto x(t)$) qui traverse la valeur 0, d'où la divergence du prefacteur et le saut de la phase.

Le saut de phase reflète une situation analogue à ce qui se passe pour le groupe $SO(3; \mathbb{R})$ des rotations dans un espace Euclidien à 3 dimensions. Pour la représentation de spin $1/2$, une rotation de 2π (indistinguable du point de vue de $SO(3; \mathbb{R})$ de l'identité) est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

De même ici, pour $\omega_0 t = 2\pi n$ avec n pair, $e^{-i\pi N_t} = 1$ et

$G(x, x'; t) \equiv \delta(x - x')$ alors que si n impair, $e^{-i\pi N_t} = -1$ et $G(x, x'; t) \equiv -\delta(x - x')$. Du point de vue classique $\omega_0 t = 2\pi n$ est représentée par l'identité sur l'espace des phases.

Comme pour $SO(3; \mathbb{R})$, qui a pour recouvrement universel $SU(2)$, le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ n'est pas simplement connexe, il a aussi un groupe de recouvrement à 2 feuillets appelé groupe métaplectique, noté $Mpl_2(\mathbb{R})$. Ce groupe métaplectique a une représentation naturelle (de dimension infinie) dans l'espace des états de l'oscillateur. On peut la voir comme un analogue pour $SL(2; \mathbb{R})$ de la représentation spinorielle de spin $1/2$ de $SO(3; \mathbb{R})$, bien que dans le cas de la représentation métaplectique, la dimension soit infinie! Cette différence est sans doute liée au fait que $SO(3; \mathbb{R})$ est un groupe compact, contrairement à $SL(2; \mathbb{R})$.

Remarque: si l'on se donne une transformation canonique classique linéaire $(x', p') \rightarrow (x, p)$, l'action $S(x, x')$ classique qui engendre cette transformation est quadratique:

$$S = \frac{1}{2} (a x^2 + b x'^2) - c x x'$$

$$p' = -\frac{\partial S}{\partial x'} = c x - b x' ; \quad p = \frac{\partial S}{\partial x} = a x - c x'$$

On obtient alors
$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{c} & \frac{1}{c} \\ \frac{ab}{c} - c & \frac{a}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ p' \end{pmatrix}$$

et la matrice est bien de déterminant 1. Le propagateur quantique associé est donc :

$$G(x; x') = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}N}}{\sqrt{i2\pi\hbar}} \sqrt{|c|} \exp\left\{ \frac{i}{2\hbar} (ax^2 + bx'^2 - 2cxx') \right\}$$

Il est intéressant de vérifier que ces propagateurs se composent bien, c'est à dire que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' G_1(x, x') G_2(x', x'') = G_{\text{eff}}(x, x'')$$

où G_{eff} est le propagateur de la transformation composée. Ceci résulte des propriétés habituelles des intégrales gaussiennes :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp\left\{ \frac{i}{2\hbar} [(b_1 + a_2)x'^2 - (c_1x + c_2x'')x'] \right\} = e^{\frac{\pm i\pi}{4}} \left(\frac{2\pi\hbar}{|b_1 + a_2|} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{i}{2\hbar} \frac{(c_1x + c_2x'')^2}{b_1 + a_2} \right)$$

où le signe dans la phase est celui de $b_1 + a_2$.
On en déduit que $a_{\text{eff}} = a_1 - \frac{c_1^2}{b_1 + a_2}$; $b_{\text{eff}} = b_2 - \frac{c_2^2}{b_1 + a_2}$; $c_{\text{eff}} = \frac{c_1 c_2}{b_1 + a_2}$

On vérifie sans peine que cette action quadratique effective engendre bien la composée des transformations linéaires engendrées par S_1 et S_2 .
Finalement :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' G_1(x, x') G_2(x', x'') = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(N_1 + N_2)}}{\sqrt{i2\pi\hbar}} e^{-i\frac{\pi}{2}N_{12}} \sqrt{|c_{\text{eff}}|} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\text{eff}}(x; x'') \right\}$$

où $N_{12} = 0$ si $b_1 + a_2 > 0$ et $N_{12} = 1$ si $b_1 + a_2 < 0$.

Les indices (de Maslov - Gutzwiller) N se composent donc ainsi :

$$N_{\text{eff}} = N_1 + N_2 + N_{12}$$

Après ces remarques sur la quantification des applications linéaires classiques canoniques (= de déterminant 1), nous revenons maintenant au calcul de la valeur moyenne de l'opérateur de Loschmidt sur un état thermique de l'oscillateur. Pourant des expressions pour λ et μ données plus haut (page D-15), on peut transformer le flot dans la base (a, a) en un flot linéaire équivalent dans la base (x, p) . La discussion précédente nous donne un algorithme explicite pour évaluer le propagateur quantique $G(x, x')$ associé à l'opérateur de Loschmidt classique. Il suffit alors de calculer l'intégrale gaussienne :

$$\langle V \rangle = \int dx dx' G_V(x, x') \rho_0(x', x)$$

Toutes ces manipulations sont en principe élémentaires, mais plutôt fastidieuses. Comme notre propos était de montrer la méthode générale, nous ne les poursuivons pas plus en détail.

Dynamique d'une chaîne semi-infinie dont le déphasage à l'origine varie de manière soudaine.

Le montage de la § page (D-11) peut être décrit de manière

(D-18) compacte comme une chaîne élastique semi infinie (modélisant la ligne coaxiale), avec une impureté en $x=0$. Un tel système est commodément caractérisé par la donnée du déphasage δ_k pour chaque vecteur d'onde k .

Cela signifie que les solutions des équations de propagation classiques peuvent se mettre sous la forme:

$$\phi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \lambda_k \left(e^{-ik(x+vt)} + e^{i\delta_k} e^{ik(x-vt)} \right)$$

(on suppose que la ligne semi-infinie correspond à $x \geq 0$, donc $f(x+vt)$ désigne un signal entrant et $g(x-vt)$ un signal sortant.)

Potons que $\phi(x,t)$ est un signal réel, ce qui impose:

$$\phi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \bar{\lambda}_{-k} \left(e^{-ik(x+vt)} + e^{-i\delta_{-k}} e^{ik(x-vt)} \right)$$

On a donc la condition $e^{i(\delta_k + \delta_{-k})} = 1$ sur le déphasage. Ceci a une conséquence importante: le déphasage doit varier avec le vecteur d'onde, si c'est une fonction non-triviale. On a par ailleurs la condition $\lambda_k = \bar{\lambda}_{-k}$ sur les amplitudes.

La dynamique classique correspondante peut se révéler plus complexe que ce que cette forme compacte suggère. Si l'effet du bord est représenté par un terme $g \phi(0)^2 \delta(x)$ dans l'Hamiltonien de la chaîne, alors δ_k est donné par:

$$e^{i\delta_k} = \frac{k - ig}{k + ig} \quad (\text{avec } g > 0).$$

Considérons une amplitude $\lambda_k = e^{ikx_0}$ (on a bien $\lambda_k = \bar{\lambda}_{-k}$) avec $x_0 > 0$.

L'onde entrante $\phi_{in}(x,t) = \delta(x_0 - x - vt)$

L'onde sortante, elle, est donnée par:

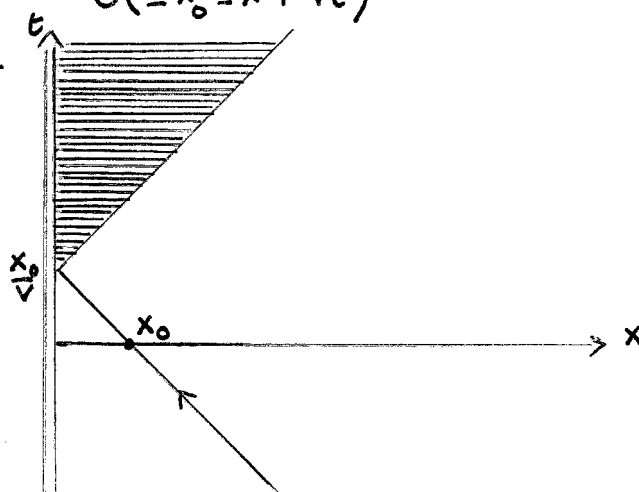
$$\phi_{out} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{k - ig}{k + ig} e^{ik(x_0 + x - vt)}$$

Comme $g > 0$, on a un pôle unique au dessous de l'axe réel pour la variable k , si bien que l'intégrale est nulle si $x_0 + x - vt > 0$. On trouve donc

$$\phi_{out} = -2g e^{g(x_0 + x - vt)} \Theta(-x_0 - x + vt)$$

Dans l'espace temps, on peut représenter la région sur laquelle le champ est non nul:

on observe un fort effet de diffraction de l'onde sortante, à l'intérieur de tout le cône de lumière issu du point d'impact en $(x=0, t = \frac{x_0}{v})$.



A cause de ces effets diffractifs, l'évolution hamiltonienne classique des champs ϕ et π , bien que linéaire, ne prend pas une forme très simple, sauf si l'on se restreint à une certaine classe de fonctions λ_k que nous allons expliciter ci-dessous. Ceci a pour conséquence que

le programme esquissé plus haut (dans le cas d'un seul oscillateur couplé paramétriquement à un autre système) pour le calcul de la décroissance de la ligne de transmission n'a, à ma connaissance, pas encore été mené à bien. Ceci tient plus à la lourdeur des calculs, que pour des raisons conceptuelles. Nous allons cependant voir qu'il existe des réponses approchées à cette question, qui présentent de plus un grand intérêt pour la physique.

Comme souvent en physique ondulatoire, les choses se passent mieux si l'on considère des paquets d'onde incidents dont la largeur en vecteur d'onde $1/a$ est petite par rapport à l'échelle caractéristique sur laquelle le déphasage varie. Le prix à payer est bien sûr l'étalement spatial du paquet d'onde incident (sur une échelle a). Mais ceci est plus proche de la situation expérimentale où l'on envoie sur le système un signal avec une largeur de bande petite par rapport à la fréquence de base.

Prenons par exemple :

$$\lambda_k = a \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{ikx_0} \left(e^{-\frac{a^2}{2}(k-k_0)^2} + e^{-\frac{a^2}{2}(k+k_0)^2} \right)$$

Dans ce cas, $\phi_{in}(x,t) = \cos[k_0(x_0 - x - vt)] \exp\left(-\frac{(x_0 - x - vt)^2}{2a^2}\right)$

Pour calculer l'onde sortante, nous ferons l'approximation que δ_k varie très peu au voisinage de chacun des deux pics de λ_k , ce qui donne :

$$\phi_{out}(x,t) \simeq \cos[k_0(x_0 + x - vt) + \delta_0] \exp\left(-\frac{(x_0 + x - vt)^2}{2a^2}\right)$$

et l'on voit que :

- 1) Les effets diffractifs ont disparu : ϕ_{in} et ϕ_{out} ont la même largeur spatiale
- 2) Le déphasage intervient bien de la manière attendue !

On peut donc envisager un calcul approché de la décroissance (présenté dans le papier de Johansson et al. déjà cité, mais sans aucun détail. En particulier, ils n'évoquent pas du tout dans ce papier la différence de nature entre décroissance par couplage linéaire et celle induite par un couplage paramétrique), dans le cas où l'on envoie un signal incident sous la forme d'un état cohérent (générateur mino. ondes : les états cohérents sont naturellement produits par des sources classiques). Un tel état cohérent est caractérisé par les valeurs moyennes des opérateurs de champ :

$$\begin{cases} \langle \phi_{in}(x,t) \rangle = \Phi_0 \cos(k_0(x+vt)) f(x+vt) \\ \langle \pi_{in}(x,t) \rangle \simeq -k_0 \Phi_0 \sin(k_0(x+vt)) f(x+vt) \end{cases}$$

Le signe $\simeq$ dans la deuxième équation signifie que nous avons négligé la dérivée temporelle de la fonction enveloppe $f(x+vt)$, en supposant que ses variations sont beaucoup plus lentes que celle de l'onde monochromatique en $\cos[k_0(x+vt)]$. Avec les paquets gaussiens discutés plus haut, ceci signifie que $k_0 a \gg 1$.

Selon que le qubit est dans l'état $\sigma_z = 1$ ou l'état $\sigma_z = -1$, on aura un déphasage (autour du vecteur d'onde k_0) égal à δ_a ou δ_b .

On aura donc des champs sortants:

$$\begin{cases} \langle \Phi_{\text{out}}^a(x,t) \rangle = \phi_0 \cos(k_0(x-vt) + \delta_a) f(vt-x) \\ \langle \Pi_{\text{out}}^a(x,t) \rangle = k_0 \phi_0 \sin(k_0(x-vt) + \delta_a) f(vt-x) \end{cases}$$

et des formules analogues pour $\langle \Phi_{\text{out}}^b \rangle, \langle \Pi_{\text{out}}^b \rangle$ où δ_a est remplacé par δ_b .

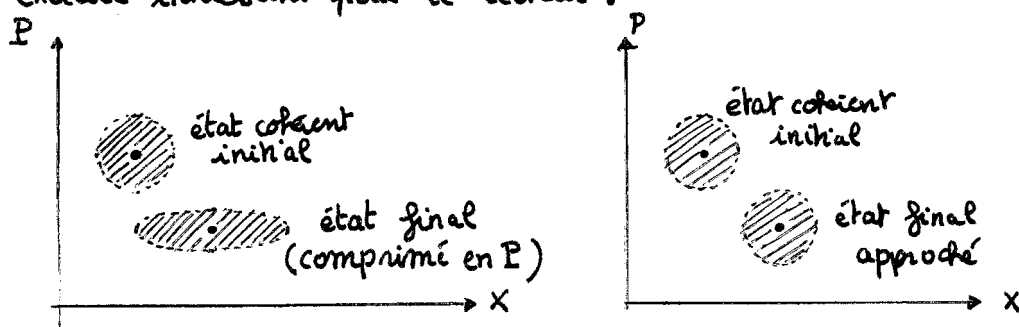
L'approximation faite (sans le dire explicitement!) par Johansson et al. consiste à ne tenir compte que des valeurs moyennes des champs en sortie. Autrement dit, ils approximent l'application classique de Loschmidt par la translation sur l'espace des phases classique qui envoie l'état $(\langle \Phi_{\text{out}}^a(x,t) \rangle, \langle \Pi_{\text{out}}^a(x,t) \rangle)$ sur l'état $(\langle \Phi_{\text{out}}^b(x,t) \rangle, \langle \Pi_{\text{out}}^b(x,t) \rangle)$.

Pour comprendre la nature de cette approximation, il est utile de revenir au cas d'un oscillateur, et à sa description en transformée de Wigner. Prenons le cas d'un état cohérent centré en z_0 , avec une trace de Wigner de symétrie circulaire.

Prenons comme exemple d'application canonique celle qui dilate la direction x d'un facteur l et la direction p d'un facteur l^{-1} . La trace de Wigner de l'état quantique obtenue en appliquant l'application (quantique) de Loschmidt sur l'état cohérent initial, est centrée en l'image de z_0 par l'application classique, mais elle a maintenant la forme d'une ellipse, allongée le long de l'axe des x , et rétrécie en p . (Les états sont appelés état comprimés ou "squeezed states" en optique quantique).

L'approximation de Johansson et al. revient à négliger la déformation des traces de Wigner lors de l'application de Loschmidt. On peut supposer qu'elle est d'autant plus raisonnable que le nombre de quanta moyen $|z_0|^2$ est grand, si bien que les fluctuations quantiques sont de toutes façons petites par rapport aux valeurs moyennes.

Je n'ai pas eu le temps de vérifier ce point, qui peut faire l'objet d'un exercice intéressant pour le lecteur!



Le programme pour ce calcul approché est maintenant simple: partant des valeurs moyennes $\langle \Phi_{\text{out}}^a \rangle, \langle \Pi_{\text{out}}^a \rangle$ et $\langle \Phi_{\text{out}}^b \rangle, \langle \Pi_{\text{out}}^b \rangle$, écrire les états cohérents correspondants en négligeant les phénomènes de "squeezing", ou encore de rotation des traces de Wigner. Pour fabriquer des états cohérents, il nous faut une décomposition des champs en opérateurs de création et d'annihilation de modes.

$$\begin{cases} \Phi(x) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \left(\frac{2\hbar}{k}\right)^{1/2} \cos(kx) (e^{-i\omega_k t} a_k + e^{i\omega_k t} a_k^\dagger) \\ \Pi(x) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} (2\hbar k)^{1/2} \cos(kx) i (-e^{-i\omega_k t} a_k + e^{i\omega_k t} a_k^\dagger) \end{cases}$$

$$\omega_k = v|k|$$

Ces relations assurent que $[\Phi(x), \Pi(x')] = i\hbar \delta(x-x')$ si $[a_k, a_{k'}^\dagger] = 2\pi \delta(k-k')$. Elles correspondent au cas où le déphasage est nul.

Lorsque l'on construit un état cohérent, il faut se donner une fonction $k \mapsto z_k$ à valeurs complexes, de sorte que

$$| \psi \rangle = \exp \left\{ \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} (z_k a_k^\dagger - \bar{z}_k a_k) \right\} | 0 \rangle$$

Cet état est normalisé, et $a_k | \psi \rangle = z_k | \psi \rangle$.

Dans cet état, on a donc:

$$\begin{cases} \langle \phi(x,t) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{k} \right)^{1/2} \cos(kx) (e^{-i\omega_k t} z_k + e^{i\omega_k t} \bar{z}_k) \\ \langle \pi(x,t) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} (2\pi k)^{1/2} i \cos(kx) (-e^{-i\omega_k t} z_k + e^{i\omega_k t} \bar{z}_k) \end{cases}$$

L'ensemble des fonctions $\cos kx$ ($k \geq 0$) est complet sur $[0, \infty[$, car

$$\int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \cos(kx) \cos(kx') = \frac{1}{4} \delta(x-x') \quad \text{si } x \text{ et } x' \text{ sont tous deux positifs.}$$

Analysons ainsi l'onde sortante. Une fonction de coupure qui simplifie le calcul est $\exp(-\frac{x}{vt})$. Ce n'est pas une fonction de $x-vt$, mais on a bien une largeur en x proportionnelle à vt .

On obtient alors:

$$\langle \phi_{out}^a(x,t) \rangle = \Phi_0 \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \cos(kx) \left(\frac{vt e^{i\delta_a} e^{-i\omega_k t}}{1 + i(k-k_0)vt} + \frac{vt e^{-i\delta_a} e^{i\omega_k t}}{1 - i(k-k_0)vt} \right)$$

$$\text{D'où } \boxed{z_k^{(a)}(t) = \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{1/2} e^{i\delta_a} \frac{e^{i\nu(k-k_0)t} vt \Phi_0}{1 + i(k-k_0)vt}}$$

Le facteur de décroissance en présence du signal de mesure cohérent est donc (toujours avec l'approximation qui néglige la déformation des paquets d'onde dans l'espace des phases):

$$R(t) = \left\langle \exp \left[- \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} (z_k^{(b)}(t) a_k^\dagger - \bar{z}_k^{(b)}(t) a_k) \right] \exp \left[\int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} (z_k^{(a)}(t) a_k^\dagger - \bar{z}_k^{(a)}(t) a_k) \right] \right\rangle$$

$$R(t) = R_Q(t) R_T(t)$$

$$R_Q(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} |z_k^{(a)}(t) - z_k^{(b)}(t)|^2 \right\}$$

$$R_T(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{|z_k^{(a)}(t) - z_k^{(b)}(t)|^2}{\exp(\beta \hbar \nu k) - 1} \right\}$$

Nous nous concentrons ici sur le facteur de décroissance quantique $R_Q(t)$.

$$|z_a(t) - z_b(t)|^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{\delta_a - \delta_b}{2} \right) \frac{k}{2\pi} \frac{vt^2}{1 + (k-k_0)^2 v^2 t^2} \Phi_0^2$$

On a donc une Lorentzienne centrée autour de k_0 dont la largeur décroît au cours du temps, ce qui est normal, puisque le signal de sortie a une largeur spatiale de plus en plus grande si t augmente, donc le vecteur d'onde de ce signal est de mieux en mieux défini. Notons que l'intégrale sur k diverge pour k grand, ce qui est sans doute lié au choix de la fonction de coupure. En utilisant la Lorentzienne comme étant approximativement $\frac{\pi}{vt} \delta(k-k_0)$, nous obtenons le joli résultat:

D-22

$$R_Q(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\delta_a - \delta_b}{2} \right) \frac{k_0 \Phi_0^2 v t}{\hbar} \right\}$$

Ceci s'interprète physiquement en rappelant que le courant d'énergie le long de la chaîne élastique est $j_E = -v^2 \Pi(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x}$

Pour le signal incident

$$\begin{cases} \Phi = \Phi_0 \cos(k_0(x+vt)) \\ \Pi \approx -\Phi_0 k_0 \sin(k_0(x+vt)) \end{cases}$$

on a $j_E = -\Phi_0^2 k_0^2 v^2 \sin^2(k_0(x+vt))$ et on a donc un courant moyen d'énergie incident $\langle j_E \rangle = -\frac{1}{2} \Phi_0^2 k_0^2 v^2$.

Or chaque photon de vecteur d'onde k_0 transporte l'énergie $\hbar k_0 v$, donc le flux F de photons incidents est $F = \frac{1}{2} \Phi_0^2 \frac{k_0 v}{\hbar}$

On a donc le résultat remarquable :

$$R_Q(t) \approx \exp \left\{ -\sin^2 \left(\frac{\delta_a - \delta_b}{2} \right) F t \right\}$$

Chaque photon supplémentaire réduit la cohérence du qubit par la même proportion, $\exp(-\sin^2(\frac{\delta_a - \delta_b}{2}))$. Photons qu'à température finie,

on doit essentiellement multiplier la quantité Ft par le nombre moyen de photons excités thermiquement dans l'état k_0 , soit $\frac{k_0 T}{\hbar v k_0}$ si $\hbar v k_0 \ll k_B T$.

Contrairement au cas d'un couplage linéaire aux coordonnées de l'environnement (pour lequel l'application de Loschmidt classique est une translation de l'espace des phases), on obtient, déjà dans la limite de température nulle, une décroissance exponentielle en temps du facteur de cohérence, lorsque l'état initial de l'environnement est un état cohérent excité. Il y a donc bien une différence qualitative importante entre forçage linéaire et excitation paramétrique des oscillateurs de l'environnement, qui se retrouve sur les propriétés de décohérence.

Apparition d'états thermiques par couplage paramétrique : l'effet Unruh au labo?

Considérons le système de deux oscillateurs, avec les opérateurs $(a, a^\dagger)$ et $(b, b^\dagger)$ associés. Par excitation paramétrique de ce système, on peut engendrer la transformation unitaire (linéaire sur les coordonnées classiques):

$$\begin{cases} U(\theta) a^\dagger U(\theta)^{-1} \equiv A^\dagger = \cosh \theta a^\dagger + \sinh \theta b \\ U(\theta) b^\dagger U(\theta)^{-1} \equiv B^\dagger = \cosh \theta b^\dagger + \sinh \theta a \end{cases}$$

et l'on obtient A et B de la même façon. Il est facile de vérifier que les relations de commutation canoniques sont préservées par cette transformation :

$$[A^\dagger, B^\dagger] = [A, B] = [A^\dagger, B] = [A, B^\dagger] = 0 ; \quad [A, A^\dagger] = [B, B^\dagger] = \mathbb{1}.$$

Pour vouloir étudier l'état $U(\theta) |0\rangle$. Comme $a|0\rangle = b|0\rangle = 0$, on voit que $U(\theta) |0\rangle$ est annihilé par A et B . Cette propriété caractérise $U(\theta) |0\rangle$ à une phase globale près.

Notons que si $| \psi \rangle = \exp(\lambda a^\dagger b^\dagger) | 0 \rangle$, alors $\begin{cases} a | \psi \rangle = \lambda b^\dagger | \psi \rangle \\ b | \psi \rangle = \lambda a^\dagger | \psi \rangle \end{cases}$

(D-23)

donc
$$\begin{cases} A | \psi \rangle = (\lambda c h \theta + s h \theta) b^\dagger | \psi \rangle \\ B | \psi \rangle = (\lambda c h \theta + s h \theta) a^\dagger | \psi \rangle \end{cases}$$

On voit donc que $U(\theta) | 0 \rangle$ est proportionnel à $\exp(-h\theta a^\dagger b^\dagger) | 0 \rangle$.
Si l'on souhaite normaliser l'état (toujours préférable pour le résultat de l'action d'un opérateur unitaire !) on peut prendre :

$$U(\theta) | 0 \rangle = \frac{1}{ch\theta} \exp(-h\theta a^\dagger b^\dagger) | 0 \rangle$$

Il s'agit bien sûr d'un état pur ! Or, si l'on examine la distribution P_n du nombre de quanta ($n = a^\dagger a$) dans l'oscillateur a de départ, alors on trouve une distribution de Bose-Einstein !

$$P_n(\theta) = \frac{(h\theta)^{2n}}{ch^{2\theta}} \quad \text{et} \quad \langle n \rangle = sh^2\theta.$$

L'apparition d'une distribution thermique se comprend facilement du point de vue des fonctions de Wigner : l'opérateur $U(\theta)$ est représenté par un propagateur gaussien, comme nous l'avons vu. Son action sur l'état gaussien $| 0 \rangle$ donne un autre état gaussien, et donc une fonction de Wigner gaussienne. Si l'on effectue une intégrale sur les coordonnées X_b et P_b du second oscillateur, la fonction de Wigner réduite (fonction de X_a, P_a) est encore gaussienne. En général, on s'attend à ce que l'aire de la tache de Wigner réduite soit plus grande que celle d'un état cohérent, à cause de l'intrication entre les deux oscillateurs. Or, il s'avère que la fonction de Wigner d'un oscillateur à l'équilibre thermique est également gaussienne. Par exemple, pour $H = \hbar \omega_0 (a^\dagger a + 1/2)$:

$$P_W(X, P) = \frac{1}{\pi \hbar} \frac{\hbar (\beta \hbar \omega_0)}{2} \exp\left(-\frac{P^2 + X^2}{\hbar \coth(\beta \hbar \omega_0 / 2)}\right)$$

Cette formule montre clairement que c'est dans la limite de température nulle ($\beta \rightarrow \infty$) que la tache de Wigner représentant l'état thermique de cet oscillateur quantique prend son extension minimale dans l'espace des phases, en accord avec le principe de Heisenberg. Une augmentation de la variance $\langle X^2 \rangle + \langle P^2 \rangle$ pour une tache gaussienne peut donc s'interpréter comme provenant d'un mélange statistique, avec une distribution de Bose des états excités !

On peut imaginer de nombreuses façons de produire un tel état. Il suffit de laisser le système relaxer dans l'état fondamental de $H_0 = \hbar \omega_0 (a^\dagger a + b^\dagger b)$, puis de modifier l'Hamiltonien, de manière soudaine ou adiabatique. Dans le dernier cas, on obtient un fondamental "habillé" de la forme $U(\theta(t)) | 0 \rangle$. Dans le premier cas, on obtient une dynamique plus complexe, qui correspond classiquement à une trajectoire non-triviale du système avec le nouvel Hamiltonien.

La principale difficulté est de savoir mesurer $a^\dagger a$, c'est à dire le nombre de quanta du point de vue de l'ancien Hamiltonien. Pour cela, on peut imaginer que l'on coupe soudainement la perturbation que l'on aurait appliquée pendant un temps fini. Typiquement, cela donnerait un Hamiltonien de la forme $H(t) = H_0 + \chi(t) (a^\dagger b^\dagger + ab)$, avec un

D-24 $\gamma(t)$ choisi en forme de méneau:



Avec le dispositif expérimental discuté plus haut dans le cadre de la mesure dispersive d'un qubit, $\gamma(t)$ pourrait être remplacé par le

déphasage que l'on peut varier temporellement en modifiant par exemple la capacité de l'oscillateur.

Je n'ai malheureusement pas d'estimations précises sur ces pseudo-distributions thermiques que l'on peut ainsi espérer créer au laboratoire. Evidemment, un tel calcul suppose que l'on quantifie explicitement la transformation canonique classique des champs $(\phi(x), \pi(x))$ induite par un déphasage qui n'est pas constant, ce qui reste à faire dans ce contexte.

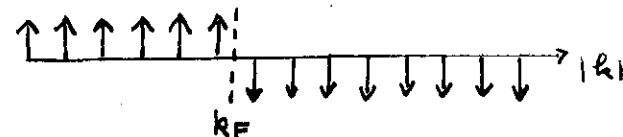
Une autre situation où $b^\dagger b$ a un sens physique bien défini se rencontre dans le contexte des atomes froids fermioniques. En variant le champ magnétique au voisinage d'une résonance de Feshbach, on peut passer d'une interaction répulsive à une interaction attractive. Il y a alors coexistence entre un système de fermions (de spin $1/2$ par exemple) et des molécules bosoniques (de spin 0). A basse température, on peut supposer que les molécules aées sont d'impulsion nulle.

On a donc un Hamiltonien qui s'écrit typiquement:

$$H = \sum_{k,\sigma} (\epsilon_k - \mu) c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} + g (c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger b + c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} b^\dagger) + (\omega - 2\mu) b^\dagger b.$$

Partant de l'état initial où $b^\dagger b = 0$ et tous les états de fermions d'énergie sont occupés, on voit que l'évolution temporelle conduit l'état initial à des états tels que $|k\uparrow\rangle$ et $|-k\downarrow\rangle$ sont soit tous deux occupés, soit tous deux vides. On peut donc utiliser l'analogie (dûe à P.W. Anderson, voir Phys. Rev. 112, 1900-1916, (1958)) entre ce système et une population de spins $1/2$, avec la règle:

$$\begin{cases} |k\uparrow; -k\downarrow\rangle \rightarrow \text{pseudo spin } \sigma_k^z = 1 \\ |0; 0\rangle \rightarrow \text{" " } \sigma_k^z = -1. \end{cases}$$

L'état initial a donc l'allure: 

Il est assez naturel, au moins pour les temps courts, d'étudier l'évolution au voisinage de cet état magnétique collinéaire en utilisant l'approximation dite de Holstein-Primakov. Cela revient à passer à des spins $S \gg 1$, écrivant de plus:

$$\begin{cases} S_k^z = S - a_k^\dagger a_k \\ S_k^+ \simeq \sqrt{2S} a_k & \text{pour } |k| \leq k_F \\ S_k^- \simeq \sqrt{2S} a_k^\dagger \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} S_k^z = -S + a_k^\dagger a_k \\ S_k^+ \simeq \sqrt{2S} a_k^\dagger \\ S_k^- \simeq \sqrt{2S} a_k \end{cases} \quad \text{pour } |k| \geq k_F.$$

$$\text{Aux temps courts, } H_{\text{eff}} = \sum_k 2|\epsilon_k| a_k^\dagger a_k + \omega b^\dagger b + g\sqrt{2S} \sum_{\epsilon_k < 0} (b^\dagger a_k^\dagger + b a_k) + g\sqrt{2S} \sum_{\epsilon_k > 0} (b^\dagger a_k + a_k^\dagger b)$$

(on a remplacé $\epsilon_k - \mu \rightarrow \epsilon_k$ et $\omega - 2\mu \rightarrow \omega$).

On peut montrer qu'aux temps courts, on a un état gaussien:

$$|\psi(t)\rangle \propto \exp\left(\sum_{\epsilon_k < 0} A_k(t) a_k^\dagger b + \sum_{\epsilon_k < 0} \sum_{\epsilon_{k'} > 0} B_{kk'}(t) a_k^\dagger a_{k'}^\dagger\right) |0\rangle$$

on peut montrer que si ω appartient à un intervalle dont les valeurs dépendent de la dispersion des fermions et du couplage g , alors la dynamique classique au voisinage de l'état initial est instable, avec des modes en $\pm \Omega_0 \pm i\gamma$.

Dans ce cas, si l'on suppose de plus que l'on peut négliger les états électroniques de $|k\rangle$ k_F (car l'instabilité est due aux fermions déjà occupés à $t=0$), on trouve: ($n = b^\dagger b$)

$$\mathcal{P}(n;t) = (1 - c(t)) c(t)^n \quad \text{et} \quad c(t) = \sum_{\epsilon_k < 0} |A_k(t)|^2$$

On a donc une distribution de Bose-Einstein pour le nombre de molécules produites, avec $\langle n(t) \rangle = \frac{c(t)}{1 - c(t)}$.

Un calcul donne:

$$\langle n(t) \rangle = \frac{2Sg^2}{\gamma^2} \sinh^2(\gamma t)$$

La croissance exponentielle aux temps courts reflète l'instabilité de l'état initial. Aux temps plus longs, on peut espérer des oscillations quasi-périodiques du nombre moyen de molécules. Voir à ce sujet l'article très stimulant de R. Bonifacio et G. Preparata, Phys. Rev. A 2, 336, (1970). Le comportement aux temps très longs reste un problème largement ouvert. Il s'agit notamment de savoir s'il y a une forme de thermalisation pour ce système quantique (qui plus est intégrable! voir le cours d'Olivier Babelon à Saclay en 2007).

Remarques historiques: L'excitation paramétrique de théories des champs par un Hamiltonien dépendant du temps a été beaucoup étudiée en cosmologie, où l'on prend une métrique d'univers non-statique, et où l'on regarde la dynamique (typiquement d'un champ scalaire) en présence de la courbure variable de l'espace-temps. Pour toutes ces questions, le lecteur est invité à regarder le livre de N.D. Birmel et P.C.W. Davies: "Quantum fields in curved space", notamment les chapitres 3 et 4.

Le premier exemple simple d'excitation paramétrique d'un champ scalaire est donné par le cas de la métrique de Robertson-Walker. Pour simplement montrer l'idée, nous supposons que la dimension spatiale est égale à 1. Cette métrique s'écrit: $ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dx^2$ (on suppose ici que la vitesse de la lumière $c=1$). On a donc un facteur d'échelle $a(t)$ qui dépend du temps, mais cet univers reste plat, comme l'espace de Minkowski. On peut faire un changement de coordonnées $t \rightarrow \eta = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$

de sorte que $dt = a(\eta) d\eta$ et donc

$$ds^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - dx^2)$$

Le Lagrangien pour un champ scalaire libre, avec cette métrique, s'écrit:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2) \quad , \text{soit} \quad \mathcal{L} =$$

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - m^2 a^2(\eta) \phi^2 \right] \quad , \text{d'où les équations du mouvement:}$$

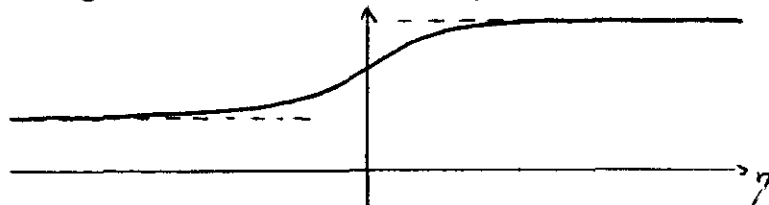
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + m^2 a^2(\eta) \phi = 0 \quad . \text{Si on prend une onde plane: } \phi(x, \eta) = e^{ikx} \chi_k(\eta)$$

D-26

$\chi_k(\eta)$ obéit à l'équation différentielle pour un oscillateur excité paramétriquement:

$$\frac{d^2 \chi_k(\eta)}{d\eta^2} + (k^2 + m^2 a^2(\eta)) \chi_k(\eta) = 0$$

Considérons une phase d'expansion entre deux phases de repos. Ceci correspond à un facteur d'échelle $a^2(\eta)$ qui varie comme:



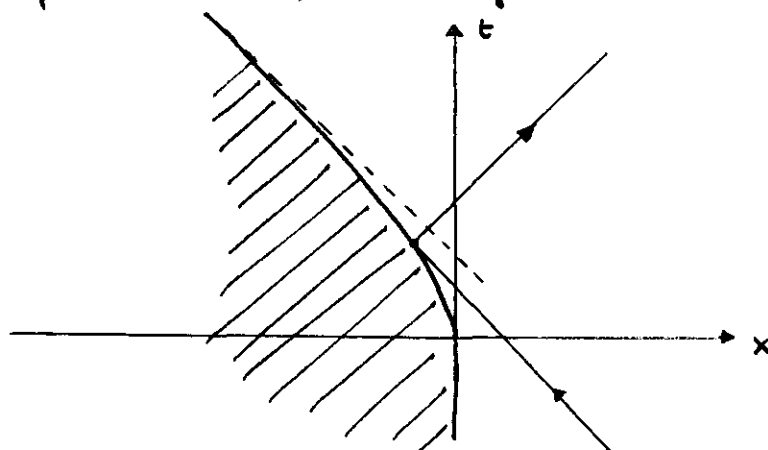
Si au "temps" $\eta \rightarrow -\infty$, le champ scalaire est dans son état fondamental, à cause de l'excitation paramétrique, il se trouve, dans la limite $\eta \rightarrow \infty$, dans un état excité (sauf si l'expansion se fait infiniment lentement).

Dans ce cas, chaque mode k se trouve dans un état comprimé, qui n'est PAS un état thermique, car la trace de Wigner qui représente l'état de cet oscillateur garde son volume dans l'espace des phases.

Un autre exemple, qui cette fois donne lieu à des distributions thermiques est celui de miroirs mobiles (voir Birrell et Davies, p. 102-109)

Considérons par exemple un miroir uniformément accéléré, donc la trajectoire $z(t)$ est décrite par $z(t) \rightarrow -t + B - A e^{-2\kappa t}$ si $t \rightarrow \infty$.

On peut représenter cela sur le diagramme:



Prenons par exemple la condition aux limites $\phi(z(t), t) = 0$.

Si l'on envoie un champ incident en $\exp(-i\omega(t+x))$, le champ sortant est une fonction de $u = t - x$ déterminée ainsi:

ce champ est émis au point $x = z(t(u))$ au temps $t(u)$, tels que

$u = t(u) - z(t(u))$, ce qui détermine implicitement $t(u)$.

L'onde sortante est donc $e^{-i\omega(t(u)+z(t(u)))} = e^{-i\omega(2t(u)-u)}$

L'effet Doppler dépendant du temps fait que le signal de sortie n'est plus monochromatique. Une analyse plus détaillée montre que ce phénomène d'excitation paramétrique conduit à un état thermique, avec une température $k_B T = \frac{\hbar \kappa}{2\pi c}$ (c vitesse de la lumière).

De la même façon, un détecteur uniformément accéléré alors que le champ Φ est dans son état fondamental "voit" une distribution thermique de photons, avec la même température que ci-dessus (W. Unruh, P.R.D. 14, 870 (1976)). Pour des propositions d'analogies expérimentales, on peut regarder:

"Analogue of Cosmological Particle Creation in an Ion trap", R. Schützhold, H. Uhlmann, et al. P.R.L. 99, 201301, (2007)

Quelques remarques sur la décohérence induite par des environnements chaotiques.

Intuitivement, si l'environnement présente une dynamique chaotique dans la limite $\hbar \rightarrow 0$, on s'attend à ce qu'un tel système soit très sensible à de petites perturbations de son Hamiltonien. En particulier, on peut imaginer que la limite $H_a - H_b \rightarrow 0$ soit singulière, avec une décohérence qui s'installe dès que H_a et H_b sont différents, avec une constante de temps déterminée par le chaos intrinsèque de H_a (ou de H_b). Donc on peut s'attendre à un régime où le taux de décohérence n'est pas directement lié à la force du couplage entre le système et son environnement, contrairement au cas des environnements gaussiens (ou plus généralement, intégrables).

Un système modèle mettant en évidence ce type de comportement a été analysé par R. Jalabert et H. Pastawski (Phys. Rev. Lett. 86, 2430, (2001)).

Pour H_a , ils considèrent une particule se déplaçant dans un espace de dimension d , en présence d'un potentiel (non précisé), qui assure un chaos fort, c'est à dire que deux trajectoires initialement proches se séparent exponentiellement vite au cours du temps. L'Hamiltonien H_b est obtenu à partir de H_a en rajoutant un potentiel $V(r)$ lentement variable, créé par une collection de diffuseurs placés au hasard, soit:

$$V(r) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{u_{\alpha}}{(2\pi \xi^2)^{d/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\xi^2}(r-R_{\alpha})^2\right\}$$

Les amplitudes u_{α} ont une valeur moyenne nulle et $\langle u_{\alpha} u_{\beta} \rangle = \delta_{\alpha\beta} u^2$. La densité des impuretés est $n_i = N/V$. Avec ces hypothèses:

$$\langle V(r)V(r') \rangle = \frac{u^2 n_i}{(4\pi \xi^2)^{d/2}} \exp\left\{-\frac{1}{4\xi^2}(r-r')^2\right\}$$

L'état initial est un paquet d'ondes gaussien, centré au point (r_0, p_0) de l'espace des phases, soit:

$$\Psi(\bar{r}; t=0) = \left(\frac{1}{\pi \sigma^2}\right)^{d/4} \exp\left\{i \frac{p_0}{\hbar} \cdot (\bar{r} - r_0) - \frac{1}{2\sigma^2} (\bar{r} - r_0)^2\right\}$$

On fait l'hypothèse que le module v_0 de la vitesse de la particule change peu. Le chaos est donc lié aux changements de la direction (typiquement, on peut imaginer un billard chaotique).

Bien que la dynamique initiale soit chaotique, on peut généraliser la notion de libre parcours moyen. C'est la longueur au bout de laquelle le déphasage typique induit par ces diffuseurs est de l'ordre de 2π .

On a d'abord un libre parcours géométrique $l_{\text{géo}} \approx \frac{1}{n_i \xi^{d-1}}$.

Chaque collision avec une impureté apporte un déphasage de l'ordre de

$$\frac{1}{\hbar} \left(\frac{u}{\xi^d}\right) \left(\frac{\xi}{v_0}\right)$$

mais de signe et d'amplitudes variables. Il faut typiquement d^p collisions,

avec $d^p \approx \hbar^2 v_0^2 \xi^{2d-2} / u^2$ pour obtenir un déphasage de l'ordre de l'unité. Le libre parcours moyen quantique est donc:

$$l \approx l_{\text{géo}} d^p = \frac{\hbar^2 v_0^2 \xi^{d-1}}{n_i u^2}$$

(D-28)

Du point de vue classique, la perturbation induite par les diffuseurs est caractérisée par le libre parcours de transport, associé à une déflexion de la particule d'invian α . Chaque collision apporte une déflexion angulaire de l'ordre de :

$$\frac{1}{\pi R} \left(\frac{u}{\xi^{d+1}} \right) \left(\frac{\xi}{v_0} \right)$$

avec $\hbar k = p_0$. On a donc : $\frac{\text{déflexion}}{\text{déphasage}} \approx \frac{1}{R \xi}$ que l'on suppose petit, pour pouvoir faire un traitement semi-classique. On voit donc que

$$P_{rn} \approx (\hbar \xi)^2 \ell$$

On va étudier l'application de Loschmidt sur des temps assez courts, ^{pour} que l'évolution quantique soit proche de l'évolution classique. Un critère pour cela est que $t \leq t_E = \lambda^{-1} \log(\hbar a)$, où λ est l'exposant de Liapounov du système classiquement chaotique associé à H_a (dans la limite $\hbar \rightarrow 0$), et a est une longueur caractéristique de H_a . Comme l'ont montré Jalabert et Pastawski, le régime le plus intéressant est celui qui correspond à un potentiel d'impuéré

- faible au niveau classique, soit $v_0 \lambda^{-1} \ll \ell_h$
- fort au niveau quantique, donc $\ell \ll v_0 \lambda^{-1}$

Le point de départ de leur analyse est l'expression semi-classique pour $R(t)$:

$$R(t) = \left(\frac{\sigma^2}{\pi \hbar^2} \right)^{d/2} \int d^d r \sum_{s, \tilde{s}} C_s^{1/2} C_{\tilde{s}}^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S_s - S_{\tilde{s}}) - i \frac{\pi}{2} (N_s - N_{\tilde{s}}) \right\} \exp \left\{ - \frac{\sigma^2}{2 \hbar^2} [(\bar{P}_s - P_0)^2 + (\bar{P}_{\tilde{s}} - P_0)^2] \right\}$$

Ici : s est une trajectoire classique qui part de r_0 (avec l'impulsion $\bar{P}_s$) au temps $t=0$ et qui aboutit au point r au temps t . S_s est l'action classique correspondante et l'indice de Maslov. Gutzwiller N_s compte le nombre de points conjugués le long de cette trajectoire. $C_s^{1/2}$ est la densité semi-classique, avec :

$$C_s = |\det B_s|^{-1/2}, \quad (B_s)_{ij} = - \frac{\partial^2 S_s}{\partial r_i \partial \bar{r}_j}.$$

L'hypothèse de chaos fort revient ici à dire que l'inverse de B_s croît exponentiellement avec le temps, car $(B_s)^{-1}_{ij} = - \frac{\partial^2 S_s}{\partial \bar{r}_i \partial r_j}$,

avec $\bar{P}_j$ impulsion initiale. Lorsque l'on aura besoin d'estimer cette matrice, Jalabert et Pastawski feront l'hypothèse qu'on peut la prendre égale à $\exp(\lambda t) \mathbb{1}$.

La trajectoire $\tilde{s}$ part de r_0 (avec l'impulsion $\bar{P}_{\tilde{s}}$) pour aller à r , mais elle est régie par l'Hamiltonien H_b (H_a plus le potentiel aléatoire).

L'hypothèse que le désordre est faible au niveau classique nous autorise à supposer que $\tilde{s}$ restera proche de s , tant que la longueur de s est inférieure à ℓ_h .

Comme $R(t)$ est complexe, et que sa phase oscille fortement d'une réalisation à l'autre du potentiel aléatoire, moyenne $R(t)$ sur le désordre n'a pas grand sens. Il faut donc moyenner $|R(t)|^2$, ce qui revient à doubler le nombre de trajectoires $(s, \tilde{s}, s', \tilde{s}')$ et le nombre de variables d'intégration (r et r').

Comme $\tilde{S}$ est supposée proche de s (et $\tilde{S}'$ proche de s'), on peut développer la différence $S_s - S_{\tilde{s}}$ au premier ordre par rapport au potentiel aléatoire, ce qui donne :

(D.29)

$$S_s - S_{\tilde{s}} = \Delta S_s \simeq - \int_0^t d\bar{t} V(q_s(\bar{t}))$$

où la fonction $\bar{t} \mapsto q_s(\bar{t})$ décrit la trajectoire s .

On peut alors écrire :

$$|R(t)|^2 \simeq \left(\frac{\sigma^2}{\pi \hbar^2}\right)^d \int dr \int dr' \sum_{s,s'} C_s C_{s'} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\Delta S_s - \Delta S_{s'})\right\} \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{\hbar^2}[(\bar{P}_s - P_0)^2 + (\bar{P}_{s'} - P_0)^2]\right\}$$

Pour moyenner cette quantité sur les réalisations du désordre, on doit distinguer entre les paires de trajectoires s et s' qui passent au voisinage des mêmes impuretés, et donc les contributions sont corréliées, et les paires de trajectoires indépendantes, qui visitent des impuretés qui ne sont pas toutes communes à ces deux trajectoires.

Commençons par les paires indépendantes. Dans ce cas, il s'agit de moyenner $\exp\left(\frac{i}{\hbar} \Delta S_s\right)$.

En supposant le désordre gaussien, nous obtenons :

$$\langle \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Delta S\right) \rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar^2} \int_0^t d\bar{t} \int_0^{\bar{t}} d\bar{t}' \langle V(q_s(\bar{t})) V(q_s(\bar{t}')) \rangle\right\}$$

où le corrélateur a déjà été évalué (page 27).

$$\langle \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Delta S\right) \rangle = \exp\left(-\frac{v_0 t}{2\tilde{\ell}}\right), \quad \tilde{\ell} = \frac{4\sqrt{\pi} \hbar^2 v_0^2 \tilde{S}^{d-1}}{m_i u^2} = 4\sqrt{\pi} \ell.$$

La contribution des paires indépendantes est donc :

$$|R(t)|_{\text{paires indépendantes}}^2 \simeq \left(\frac{\sigma^2}{\pi \hbar^2}\right)^d \left| \int dr \sum_s C_s \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{\hbar^2} (\bar{P}_s - P_0)^2\right\} \right|^2 \exp\left(-\frac{v_0 t}{\tilde{\ell}}\right)$$

ceci est l'expression semi-classique pour $|R^*(t)|^2$ en l'absence d'impuretés, donc cela vaut 1.

D'où : $\boxed{|R(t)|_{\text{paires indépendantes}}^2 \simeq \exp(-v_0 t / \tilde{\ell})}$

Physiquement, ce terme traduit le fait que l'amplitude de probabilité pour aller de r_0 à r est déphasée d'une quantité aléatoire $\frac{\Delta S}{\hbar}$ en présence des impuretés.

Considérons maintenant des paires de trajectoires s et s' qui visitent les mêmes impuretés. Les contributions de s et s' sont donc corréliées lorsque l'on effectue la moyenne sur le désordre. Comme les corrélations du potentiel ont pour portée $\tilde{\ell}$, on peut supposer que s et s' restent proches, et donc que

$$\Delta S_s - \Delta S_{s'} \simeq \int_0^t d\bar{t} \nabla V(q_s(\bar{t})) \cdot (q_{s'}(\bar{t}) - q_s(\bar{t}))$$

Pour estimer la séparation $q_{s'}(\bar{t}) - q_s(\bar{t})$ entre les deux trajectoires, connaissant leur séparation (nulle) en $t=0$ et $r-r'$ au temps t , on écrit :

$$q_{s'}(\bar{t}) - q_s(\bar{t}) = \mathcal{B}^{-1}(\bar{t}) \mathcal{B}(t) (r' - r)$$

(D-30) L'hypothèse de chaos fort suggère de prendre:

$$q_0(\bar{t}) - q_0(\bar{t}') = e^{\lambda(\bar{t} - \bar{t}')} (r' - r)$$

On peut alors écrire la moyenne du terme de phase comme:

$$\langle \exp \frac{i}{\hbar} (\Delta S_\alpha - \Delta S_{\alpha'}) \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2\hbar^2} \int_0^t d\bar{t} \int_0^t d\bar{t}' e^{\lambda(\bar{t} + \bar{t}' - 2t)} \langle \nabla_\alpha V(q_0(\bar{t})) \nabla_{\beta'} V(q_0(\bar{t}')) \rangle \right. \\ \left. (r'_\alpha - r_\alpha)(r'_\beta - r_\beta) \right]$$

Comme le corrélateur des potentiels, le corrélateur des forces décroît rapidement sur une échelle $\bar{\xi}$. On peut donc intégrer séparément sur $\frac{\bar{t} + \bar{t}'}{2}$ et sur $\bar{t} - \bar{t}'$. On trouve:

$$\langle \exp \frac{i}{\hbar} (\Delta S_\alpha - \Delta S_{\alpha'}) \rangle \simeq \exp \left(-\frac{A}{2\hbar^2} (r - r')^2 \right) \quad \text{avec } A = \frac{(d-1)n_i \hbar^2}{4\lambda v_0 (4\pi \bar{\xi}^2)^{\frac{d-1}{2}}}$$

On peut alors effectuer l'intégrale gaussienne sur r' , d'où:

$$|R(t)|_{\text{pairs}}^2 \simeq \left(\frac{\sigma^2}{\pi \hbar^2} \right)^d \left(\frac{2\pi \hbar^2}{A} \right)^{d/2} \int dr \sum_\alpha C_\alpha^2 \exp \left[-\frac{2\sigma^2}{\hbar^2} (\bar{p}_\alpha - p_0)^2 \right]$$

Le coefficient C_α permet de passer de l'intégrale sur r à l'intégrale sur $\bar{p}$. Il reste un facteur C_α hors de l'intégrale, que l'on peut approximer par une constante multipliée par $e^{-\lambda t}$ si $\lambda t \gg 1$.

d'où $\boxed{|R(t)|_{\text{pairs}}^2 \simeq \bar{A} \exp(-\lambda t)}$ et $\bar{A}$ est proportionnel à $A^{-d/2}$.

Donc la force de la perturbation intervient uniquement dans l'amplitude $\bar{A}$, mais pas dans la dépendance temporelle.

Si le désordre est quantiquement fort, $\lambda \gg \frac{v_0}{\bar{\xi}}$ et la contribution de

ces paires de trajectoires corrélées domine le processus de décohérence, avec un temps caractéristique déterminé par la dynamique classique non perturbée.

De nombreux autres travaux ont été consacrés à l'étude de l'application de Loschmidt pour des systèmes classiques et quantiques. Une revue récente est:

"Dynamics of Loschmidt echoes and fidelity decay", T. Gouin, T. Prosen, T. H. Seligman and M. Žnidarič, Physics Reports, 435, 33-156, (2006).

Prise en compte de la dynamique du système.

Jusqu'à présent nous avons supposé que le système est soumis à une décohérence si rapide qu'il n'a pas le temps d'évoluer. Ceci nous a permis de nous concentrer sur la dynamique de l'environnement, et de ramener le calcul de la décohérence à celui de la fidélité $R(t)$. Toutefois, les progrès expérimentaux réalisés ces dernières années ont permis de réaliser des bits quantiques (systèmes à deux niveaux) pour lesquels la décohérence s'effectue à des échelles de temps comparables ou supérieures à celle de la dynamique du qubit (typiquement $\hbar/\Delta E$ avec $\Delta E = |E_a - E_b|$). On doit donc décrire un tel système dans sa globalité, ce qui est en général beaucoup plus difficile!

Un cas relativement simple est celui d'une particule libre, ou d'un oscillateur couplé linéairement à un bain d'oscillateurs, de sorte que l'Hamiltonien global reste quadratique, donc intégrable.

Prendons par exemple le modèle de Caldeira-Leggett déjà évoqué :

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega_0^2 X^2 + \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2} \omega_{\alpha} P_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \omega_{\alpha} (q_{\alpha} + \lambda_{\alpha} X)^2 \right)$$

avec une densité spectrale ohmique : $g(\omega) \lambda(\omega)^2 = 2 \frac{\gamma}{\pi} \omega$

$$(g(\omega) = \sum_{\alpha} \delta(\omega - \omega_{\alpha})).$$

Les valeurs moyennes $\langle X \rangle$ et $\langle P \rangle$ de cet oscillateur obéissent à :

$$\begin{cases} \frac{d\langle X \rangle}{dt} = \frac{\langle P \rangle}{M} \\ \frac{d\langle P \rangle}{dt} = -M\omega_0^2 \langle X \rangle - \gamma \langle \dot{X} \rangle \end{cases} \quad \text{posons } \gamma = \frac{M}{\tau}.$$

On a donc des oscillations amorties :

$$X(t) = e^{-t/2\tau} \left\{ \left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{2\Omega\tau} \sin(\Omega t) \right) X(0) + \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \dot{X}(0) \right\}$$

$$\text{avec } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \quad (\text{amortissement faible}).$$

Si on prépare l'oscillateur dans un état cohérent à $t=0$ ($|z_0\rangle$) centré en (X_0, P_0) et que l'état du système complet soit factorisé à $t=0$:

$$|\Psi(t=0)\rangle = |z_0\rangle \otimes |0\rangle_{\text{env}}$$

alors la tache gaussienne associée à la fonction de Wigner réduite de cet oscillateur tombe en spirale vers le point d'équilibre classique $(X, P) = (0, 0)$

De plus, on assiste à des phénomènes de type "squeezing" : l'environnement dissipatif effectue en quelque sorte une mesure continue de la position X : on s'attend à ce que les fluctuations en X soient réduites par rapport aux fluctuations quantiques de l'oscillateur non perturbé. Par contre, à cause du principe de Heisenberg, les fluctuations de P vont augmenter.

Par exemple, on peut montrer que lorsque $t/\tau \gg 1$, on tend vers une distribution gaussienne avec :

$$\begin{cases} \langle X^2 \rangle = \frac{2\hbar\tau}{\pi M} \log\left(\frac{1}{\omega_0\tau}\right) & (\text{régime sur-amorti}) \\ \langle P^2 \rangle = \frac{2M\hbar}{\tau} \log(\omega_{\text{Max}}\tau) \end{cases} \quad \omega_{\text{Max}} \text{ est la fréquence de coupure de l'environnement.}$$

donc $\langle X^2 \rangle \rightarrow 0$ si $\tau \rightarrow 0$ (couplage très fort) et $\langle P^2 \rangle \rightarrow \infty$ comme attendu.

Il existe une classe très intéressante de modèles d'oscillateur couplés à un environnement pour lesquels les états cohérents de l'oscillateur ne s'effritent PAS avec l'environnement au cours de l'évolution à partir d'un état initial de la forme : $|z_0\rangle \otimes |0\rangle_{\text{env}}$. Une discussion très détaillée de ces modèles est donnée par B.R. Mollow dans l'article :

"Quantum theory of field attenuation" (Phys. Rev. 168; 1896-1919, (1968)). La motivation était de décrire quantiquement l'absorption de photons par un milieu matériel. Une approximation commode est de décrire le détecteur par une assemblée d'oscillateurs : $H_D = \sum_j \hbar \omega_j b_j^\dagger b_j$

La simplification se produit lorsque l'on ne garde que les termes proches d'une résonance. Si $H_{\text{photon}} = \hbar \omega_0 a^\dagger a$, ces termes correspondent à l'absorption d'un photon et l'excitation du détecteur soit $a b_j^\dagger$, ou à l'inverse la désexcitation du détecteur avec émission d'un photon $a^\dagger b_j$.

On a un Hamiltonien de couplage $H_c = \hbar \left\{ a^\dagger \left(\sum_j g_j b_j \right) + a \left(\sum_j g_j b_j^\dagger \right) \right\}$

D'éventuels termes non-résonants seraient de la forme $a^\dagger b_j^\dagger$ ou $a b_j$.

On voit donc qu'un état cohérent (état propre simultané des a et b_j) reste un état cohérent au cours du temps, et cet état est factorisable.

La règle d'or de Fermi indique que les photons $\hbar \omega_0$ ayant une durée de vie finie si les oscillateurs du détecteur sont bien décrits par une densité spectrale continue dont le support contient l'énergie $\hbar \omega_0$ du mode de photon. Dans ce cas, une bonne approximation est de dire que

$$|\psi(t)\rangle = |z(t)\rangle \otimes |\text{Env}(t)\rangle \quad \text{avec} \quad z(t) = e^{\uparrow -\kappa t} e^{\uparrow -i(\omega_0 + \delta\omega_0)t} z_0.$$

amortissement déplacement du mode par couplage au détecteur.

On peut alors définir (et dans ce cas calculer très simplement) un "super-opérateur" $\mathcal{U}(t)$:

si le système est décrit à $t=0$ par la matrice densité factorisable $\rho(0) \otimes |0\rangle\langle 0|_{\text{env}}$, au temps t , la matrice densité n'est en général

plus factorisable (sauf si $\rho_{\text{ph}}(0) = |z_0\rangle\langle z_0|$), mais on peut s'intéresser à la matrice densité réduite $\rho_{\text{ph,red}}(t)$ qui sera linéaire en $\rho_{\text{ph}}(0)$.

$$\text{On pose alors } \mathcal{U}(t)[\rho_{\text{ph}}(0)] = \rho_{\text{ph,red}}(t)$$

$$\text{La discussion montre que } \mathcal{U}(t)(|z_0\rangle\langle z_0|) = |z(t)\rangle\langle z(t)|$$

Comme la base des états cohérents est surcomplète, cette identité caractérise complètement le super-opérateur $\mathcal{U}(t)$. On peut l'écrire dans la base des états $|n\rangle$ ($a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$; $\langle n|n\rangle = 1$) et il y a lieu de vérifier que:

$$\mathcal{U}_{nn'; ll'}(t) = \left(C_l^n C_{l'}^{n'} \right)^{1/2} (1 - |\mu(t)|^2)^p \mu(t)^n \bar{\mu}(t)^{n'}$$

si $l-n = l'-n' = p \geq 0$

$$= 0 \quad \text{sinon}$$

$$(\text{on a posé } \mu(t) = e^{-\kappa t} e^{-i(\omega_0 + \delta\omega_0)t})$$

En se plaçant dans une base tournante, on peut éliminer la phase. Il est très intéressant de regarder la partie $n=n'$; $l=l'$ de ce super-opérateur, qui donne l'évolution des populations. En particulier:

$$\mathcal{U}_{nn; n+p, n+p}(t) = C_{n+p}^n (1 - e^{-2\kappa t})^p (e^{-2\kappa t})^n$$

↑ ↑
probabilité que n photons
 p photons aient n'ont pas
été détectés été détectés

Du point de vue des photons, le processus d'absorption suit une loi binômiale.

Il est intéressant d'étudier la décroissance d'une superposition d'états cohérents. Prenons $\rho_{ph}(0) = (|z\rangle + |z'\rangle)(\langle z| + \langle z'|)$ (il faudrait normaliser cela pour avoir $\text{Tr } \rho_{ph}(0) = 1$).

En utilisant $|z\rangle\langle z'| = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^m}{\sqrt{m!}} \frac{\bar{z}'^n}{\sqrt{n!}} |m\rangle\langle n|$, et l'expression exacte du super-opérateur $U(t)$, on trouve:

$$\rho_{ph,red}(t) = |e^{-\kappa t} z\rangle\langle e^{-\kappa t} z| + |e^{-\kappa t} z'\rangle\langle e^{-\kappa t} z'| \\ + \exp\left\{-\frac{1}{2}(1-e^{-2\kappa t})(|z|^2 + |z'|^2 - 2z\bar{z}')\right\} |e^{-\kappa t} z\rangle\langle e^{-\kappa t} z'| + h.c.$$

Le coefficient de $|z\rangle\langle z'|$ a pour module $\exp\left[-\frac{1}{2}(1-e^{-2\kappa t})|z-z'|^2\right]$.

Il est égal à 1 pour tout t si $z=z'$ et aussi pour $t=0$. On a donc bien décroissance, mais il faut noter ici l'effet de la dynamique du système, qui a pour effet de réduire la décroissance par rapport au cas où la dynamique du système était figée: dans la limite $t \rightarrow \infty$, la partie non-diagonale de la matrice densité ne tend pas vers zéro! On peut comprendre ceci qualitativement de la manière suivante: au cours du temps, à cause de la dissipation, $|z\rangle$ et $|z'\rangle$ évoluent en $|e^{-\kappa t} z\rangle$ et $|e^{-\kappa t} z'\rangle$, si bien qu'ils se rapprochent dans l'espace des phases. Du point de vue de l'environnement, ces états induisent des forçages linéaires de plus en plus faibles, qui ne parviennent plus à modifier l'application de Loschmidt.

Evidemment, ceci concerne le cas où l'environnement est dans son fondamental. Il est bien sûr intéressant (et même utile, en particulier pour les expériences d'électrodynamique en cavité) de généraliser au cas d'un environnement à température non nulle. Dans ce cas, on a bien une décroissance exponentielle. Pour plus de détail, on pourra consulter les notes de Serge Haroche (cours au collège de France) qui apporteront des points de vue complémentaires, comme celui des trajectoires quantiques stochastiques pour un système quantique décrit par le super-opérateur $U(t)$, et bien sûr, une présentation très complète des expériences réalisées dans son groupe.

Système quantique à deux niveaux couplé à un environnement.

On peut toujours choisir une base du système à deux niveaux dans laquelle l'Hamiltonien pour ce système est de la forme $\frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma^z$.

Le couplage à l'environnement peut soit commuter avec σ^z , comme nous l'avons supposé au début de ce cours; soit ne pas commuter avec σ^z . Dans le premier cas, nous avons la décroissance, associée à une application de Loschmidt non triviale. Dans le second, le couplage à l'environnement peut faire passer de l'état excité $|1\rangle$ au fondamental $|0\rangle$ et réciproquement. Si l'environnement est dans son fondamental, seule la transition de désexcitation $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ a lieu, avec un taux prédit, dans la limite de faible couplage, par la règle d'or de Fermi. Si l'environnement est à température finie, la transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ devient possible. Les deux probabilités de transitions satisfont alors la condition d'équilibre:

$$P_{\text{excitation}} / P_{\text{désexcitation}} = e^{-\beta \hbar \omega_0}$$

Il est utile de regarder ce qui se passe lorsque les deux types de couplage sont présents. Considérons l'Hamiltonien:

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma^z + H_{\text{env}} + \sigma_x \otimes X + \sigma_z \otimes Z$$

(D-34) où les opérateurs X et Z agissent dans l'espace des états de l'environnement.

Lorsque les couplages X et Z sont faibles, et que l'environnement présente un spectre large, on peut écrire une équation maîtresse pour l'évolution de la matrice densité du système à deux niveaux. Cette description suppose que l'action du système à deux niveaux sur l'environnement ne modifie pas les propriétés statistiques du bruit $\langle XX \rangle$ et $\langle ZZ \rangle$ agissant sur lui: l'environnement se comporte alors comme un réservoir. En faisant l'hypothèse que $\langle X \rangle = \langle Z \rangle = 0$, on obtient, dans la limite de faible couplage:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S_{\uparrow\uparrow}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} C_{XX}(\omega_0) S_{\uparrow\uparrow}(t) + \frac{1}{\hbar^2} C_{XX}(-\omega_0) S_{\downarrow\downarrow}(t) \\ \frac{d}{dt} S_{\downarrow\downarrow}(t) = \frac{1}{\hbar^2} C_{XX}(\omega_0) S_{\uparrow\uparrow}(t) - \frac{1}{\hbar^2} C_{XX}(-\omega_0) S_{\downarrow\downarrow}(t) \end{cases}$$

Soit $\langle \sigma^z \rangle = S_{\uparrow\uparrow} - S_{\downarrow\downarrow}$

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma^z \rangle = -\frac{1}{T_1} [\langle \sigma^z \rangle - \langle \sigma^z \rangle_{eq}] \quad \text{avec} \quad \frac{1}{T_1} = \frac{C_{XX}(\omega_0) + C_{XX}(-\omega_0)}{\hbar^2}$$

$$\text{et } \langle \sigma^z \rangle_{eq} = -\tanh\left(\frac{\beta \hbar \omega_0}{2}\right)$$

On a posé $C_{AA}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle A_H(t) A_H(0) \rangle_{Env}$

T_1 est appelé temps de relaxation longitudinal.

Pour la partie non-diagonale (qui mesure la décohérence au sens où nous l'avons définie:

$$\frac{d}{dt} (\text{Log } S_{\uparrow\downarrow}) = -i(\omega_0 + \Delta\omega_0) - \frac{1}{T_2}$$

$$\text{avec } \frac{1}{T_2} = \frac{1}{2T_1} + \frac{2}{\hbar^2} C_{ZZ}(\omega=0)$$

T_2 est le temps de relaxation transverse.

Ce genre de description est utilisée depuis longtemps dans le contexte de la RMN. Pour plus de détails sur la dérivation de l'équation maîtresse, on pourra consulter: "Processus d'interactions entre photons et atomes" par C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, chapitre IV.

Cela dit, il existe des phénomènes qui ne sont pas capturés par cette description perturbative. Lorsque l'on augmente la force du couplage au bain, il peut se produire une transition de phase dynamique. Dans ce contexte, l'Hamiltonien le plus étudié est l'Hamiltonien spin-boson:

$$H = \epsilon \sigma_z - \Delta \sigma_x + \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2} m_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 x_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \frac{p_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \right) + \sigma_z \otimes \sum_{\alpha} C_{\alpha} x_{\alpha}$$

Posons $Q \equiv \sum_{\alpha} C_{\alpha} x_{\alpha}$. Pour un environnement à $T=0$, on a:

$$\langle \mathcal{O}(Q(t)Q(0)) \rangle = \sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}\omega_{\alpha}} (e^{-i\omega_{\alpha}t} \theta(t) + e^{i\omega_{\alpha}t} \theta(-t))$$

Donc la dynamique du spin sera complètement déterminée par la densité spectrale

$$J(\omega) \equiv \frac{\pi}{2} \sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}} \delta(\omega - \omega_{\alpha})$$

Avec ces notations, on peut calculer le fondamental $|+\rangle$ du bain si le spin est figé dans l'état $|+\rangle$ (et pareillement l'état $|-\rangle$ pour le spin $|-\rangle$).

On obtient des états cohérents:

$$|\pm\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}\omega_{\alpha}^3}\right) \exp\left(\mp \sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}}{(2m_{\alpha}\omega_{\alpha}^3)^{1/2}} a_{\alpha}^{\dagger}\right) |0\rangle$$

et le recouvrement entre ces états est:

$$\langle + | - \rangle = \exp\left(-\sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}^3}\right) = \exp\left(-\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J(\omega)}{\omega^2} d\omega\right)$$

Pour simplifier, nous supposons que $J(\omega)=0$ si $\omega \gg \omega_c$ et $J(\omega) \propto \omega^s$ pour $\omega \leq \omega_c$.

• Si $s > 1$, l'intégrale n'a pas de divergence infrarouge, donc $\langle + | - \rangle > 0$.
On s'attend à ce que l'effet de l'environnement sur la dynamique du spin soit relativement faible.

• Si $s=1$ (cas ohmique) $\langle + | - \rangle \sim \left(\frac{\omega_{\text{min}}}{\omega_c}\right)^{\alpha} > 0$. On a une

décohérence algébrique, comme nous l'avons déjà vu.

• Si $0 < s < 1$, alors $\langle + | - \rangle \sim \exp\left[-\text{cte} \left(\frac{\omega_c}{\omega_{\text{min}}}\right)^{1-s}\right]$, et la décohérence est beaucoup plus forte.

Pour analyser la cohérence quantique d'un tel système, il est naturel de supposer $H = -\Delta \sigma^x$ et $C_{\alpha} = 0$ dans un premier temps.

Supposons que à $t=0$, $|\Psi(0)\rangle = |+\rangle$, alors:

$$|\Psi(t)\rangle = \cos(\Delta t) |+\rangle + i \sin(\Delta t) |-\rangle$$

On a donc des oscillations cohérentes entre les deux puits de potentiel.

Intuitivement, le couplage à l'environnement a tendance à "mesurer" la valeur de σ^z et donc s'oppose au maintien de la cohérence de phase du spin. On peut qualitativement aborder ce problème par une approche de renormalisation. Partons de l'énergie $\Lambda_0 = \omega_c$, puis éliminons les modes les plus rapides du bain, dans la tranche d'énergie $\Lambda' < \omega_c < \Lambda$, en supposant $\Delta < \Lambda'$. Dans ce cas, les oscillations du spin sont lentes pour ces oscillateurs, qui suivent bien les changements du spin. On peut donc supposer que ces oscillateurs sont dans leur fondamental $|+\rangle$ ou $|-\rangle$ selon la valeur de σ^z .

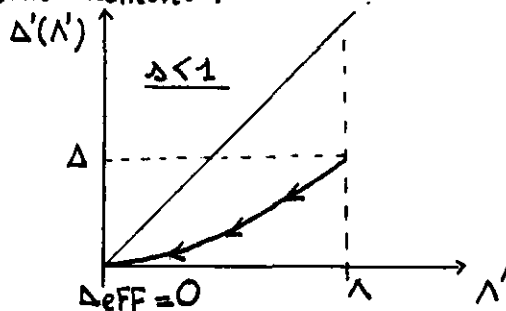
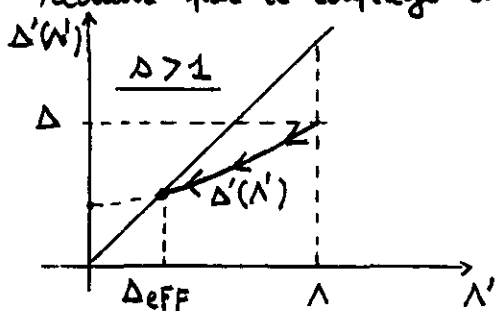
Mais ceci réduit l'élément de matrice tunnel: Δ est remplacé par $\Delta \langle + | - \rangle = \Delta'$.
 $\Lambda' \leq \omega_c \leq \Lambda_0$

$$\text{Donc } \Delta' = \Delta \exp\left\{-\frac{2}{\pi} \int_{\Lambda'}^{\Lambda} \frac{J(\omega)}{\omega^2} d\omega\right\} \equiv \Delta'(\Lambda')$$

On peut alors itérer la procédure tant que $\Lambda' > \Delta'$. Nous avons plusieurs cas de figure:

• Si $s > 1$, comme l'intégrale donnant le recouvrement converge, il existe une solution $\Delta' \neq 0$ à l'équation $\Delta' = \Delta \exp\left(-\frac{2}{\pi} \int_{\Delta'}^{\Lambda} \frac{J(\omega)}{\omega^2} d\omega\right)$.

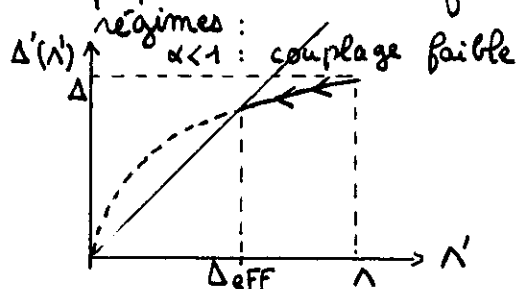
on a donc des oscillations cohérentes, mais avec une fréquence $\Delta' / \hbar$ réduite par le couplage à l'environnement.



(D-36)

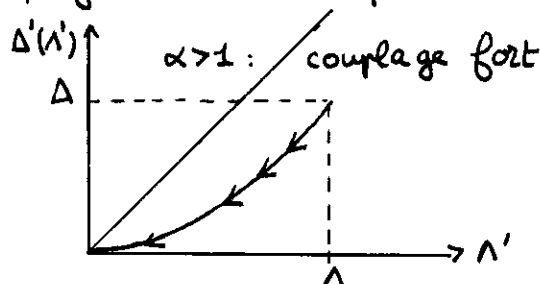
En cas $0 < \alpha < 1$ l'intégrale donnant le recouvrement diverge en loi de puissance, donc celui-ci tend rapidement vers zéro. Le schéma ci-dessus montre que la seule solution auto-cohérente est $\Delta_{\text{eff}} = 0$. L'environnement est si fortement couplé au système à deux niveaux que la dynamique de celui-ci est supprimée. Le phénomène est souvent appelé "effet Zénon", en mémoire au philosophe Grec qui pensait avoir démontré l'impossibilité du mouvement.

Le cas ohmique est à la frontière, et cette propriété le rend particulièrement intéressant. En effet, on a $\Delta' = \Delta \left(\frac{\Lambda'}{\Lambda_0} \right)^\alpha$ où α est proportionnel à la force du couplage. On voit qu'il existe deux régimes :



régime délocalisé (quantiquement cohérent)

$$\Delta_{\text{eff}} = \Delta \left(\frac{\Delta}{\Lambda} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$



régime localisé (quantiquement incohérent)

$$\Delta_{\text{eff}} = 0$$

Etat fondamental non-dégénéré

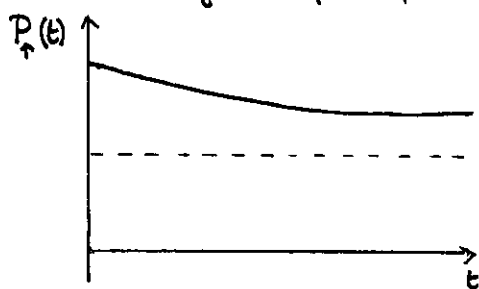
$$\langle \sigma_z \rangle = 0$$

Etat fondamental dégénéré

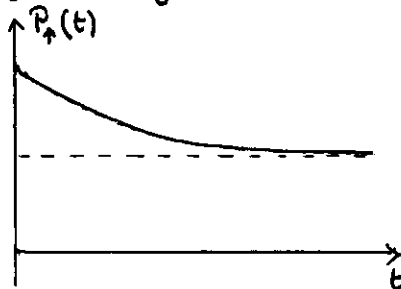
$$\langle \sigma_z \rangle \neq 0 \quad (\text{brisure spontanée de symétrie})$$

Les arguments ci-dessus concernent en effet plutôt la nature du fondamental, plutôt que le problème dynamique proprement dit. L'étude de la dynamique a mobilisé beaucoup de travaux, selon des points de vue et outils variés. Un article de revue important est celui de A. Leggett et al, Rev. Mod. Phys. 59, 1-85, (1987) qui s'appuie surtout sur des méthodes d'intégrales de chemins en temps réel, pour calculer l'évolution de la matrice densité réduite du système à deux niveaux. Une approche théorique originale, combinant transformations canoniques et équations maïtenses, a été développée à Jussieu par C. Aslangul, N. Pottier et D. Saint-James, J. Physique (Paris) 47, 1657, (1986). Enfin, un développement théorique plus récent a utilisé une équivalence avec un modèle Sine-Gordon avec une interaction au bord : F. Lesage et H. Saleur, Phys. Rev. Lett. 80, 4370, (1998).

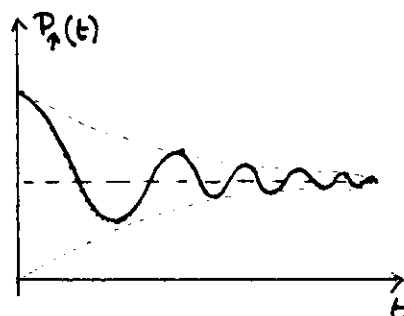
Pour illustrer les résultats de ces études, voici une image qualitative de la dynamique pour différents régimes :



localisation : (cas subohmique $\alpha < 1$ et ohmique à couplage fort $\alpha > 1$)



Relaxation incohérente (cas ohmique à couplage modéré : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$)



oscillations amorties : (cas super-ohmique ou ohmique à couplage faible, $\alpha < 1/2$)

Dans le cas ohmique, pour $0 < \alpha < 1/2$, Lesage et Saker, par des méthodes de facteurs de forme, obtiennent :

$$P_+(t) - P_-(t) = \exp(-\Gamma t) \cos(\Omega t)$$

avec le résultat explicite : $\frac{\Gamma}{\Omega} = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right]$

(notons que Ω dépend de Δ, Λ et α d'une manière sans doute assez bien décrite par l'approche de renormalisation ci-dessus, je m'attendrais à ce que $\Omega \equiv \frac{\Delta_{\text{eff}}}{\hbar}$, il faudrait vérifier ce point).

On voit que $\frac{\Gamma}{\Omega} \rightarrow 0$ si $\alpha \rightarrow 0$ (pas de couplage à l'environnement) et

$\frac{\Gamma}{\Omega} \rightarrow \infty$ si $\alpha \rightarrow 1/2$ par valeurs inférieures.