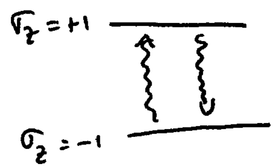
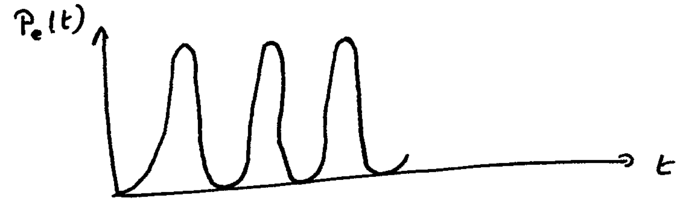
Modèle de Jaynes-Cummings-Gaudin

I. Oscillations de Rabi

Interaction d'un atome à deux niveaux avec un mode électromagnétique dans une cavité





$$H = \hbar\,\omega_0 \frac{\sigma^z}{2} + \hbar\,\Omega\left[\sigma^+ b + \sigma^- b^+\right]$$

$$b(t) = e^{-i\omega t}\, b_0$$

à la résonance $\Delta = \omega - \omega_0 = 0$.

$$|\psi\rangle = e^{-i\omega\, b_0^+ b_0\, t}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

la solution de $i\hbar\,\partial_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle$ telle que $\psi_1(0) = 0$ est

$$\begin{cases}\psi_1 = e^{-i\frac{\omega}{2}t}\sin \Omega_{Rabi}\, t\\[2mm] \psi_2 = -\dfrac{1}{2\Omega b_0}\, e^{i\frac{\omega}{2}t}\left(2\Omega_{Rabi}\cos\Omega_{Rabi}\, t + i\,\Delta \sin\Omega_{Rabi}\, t\right)\end{cases}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \frac{\Omega^2_{Rabi}}{\Omega^2\, b_0^+ b_0}\,, \qquad \Omega^2_{Rabi} = \Omega^2\left(b_0^+ b_0 + k^2\right),\quad k = \frac{\Delta}{2\Omega}$$

la probabilité de trouver l'atome dans l'état excité est

$$P_e(t) = \frac{\psi_1^*(t)\,\psi_1(t)}{\langle\psi|\psi\rangle} = \Omega^2\, b_0^+ b_0\, \frac{\sin^2 \Omega_{Rabi}\, t}{\Omega^2_{Rabi}}$$

ou encore

$$\boxed{\frac{\langle\psi|\sigma^z|\psi\rangle}{\langle\downarrow|\sigma^z|\downarrow\rangle} = 1 - 2\,\Omega^2\, b_0^+ b_0\, \frac{\sin^2\Omega_{Rabi}\, t}{\Omega^2_{Rabi}}}$$

II Modèle de Jaynes - Cummings (1963)

Dans le paragraphe précédent le mode électromagnétique était classique i.e. nombre de photons $\simeq$ infini. Que se passe t'il lorsque le nombre de photons dans la cavité est fini ?

$$\boxed{H = \hbar \omega_0 \frac{\sigma^z}{2} + \hbar \omega b^+ b + \hbar \Omega [\sigma^+ b + \sigma^- b^+]}$$

$$[\sigma^z, \sigma^\pm] = \pm \sigma^\pm, \quad [\sigma^+, \sigma^-] = \sigma^z, \quad [b, b^+] = 1.$$

Le modèle, bien que non linéaire est encore exactement soluble. En fait le système est intégrable

$$H = \omega H_1 + \Omega H_0$$

$$H_1 = b^+ b + \frac{1}{2}\sigma^z$$

$$H_0 = k \sigma^z + b^+ \sigma^- + b \sigma^+ \quad ; \quad k = \frac{\Delta}{2\Omega}$$

$$[H_1, H_0] = 0$$

Les equations du mouvement sont $(\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{\sigma})$

$$i\hbar \dot{s}^z = [H, s^z] = \hbar \Omega (H_0 - 2k s^z - 2 b s^+)$$

Mais
$$H_0 = \begin{pmatrix} k & b \\ b^+ & -k \end{pmatrix}$$

et donc

$$b s^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (H_0 + k)\left(\frac{1}{2} - s^z\right)$$

et l'equation de Heisenberg devient

$$\boxed{\dot{s}^z = i\Omega\,(k - 2H_0)\, s^z}$$

Les termes non linéaires sont contenus dans $H_0 s^z$. Comme H_0 est conservé la solution de cette equation est simple (Ackerhalt (1975))

$$\boxed{s^z(t) = \frac{k}{2} H_0^{-1} + e^{-2i\Omega t \cdot H_0}\left(s^z(0) - \frac{k}{2} H_0^{-1}\right)}$$

Cette astuce ne marche <u>que</u> pour un spin ½.

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \text{Fock} = \oplus\, \mathcal{H}_n$$

$$\mathcal{H}_n = \left\{ |n,\uparrow\rangle = (b^\dagger)^n |0\rangle \otimes |\uparrow\rangle,\quad |n+1,\downarrow\rangle = (b^\dagger)^{n+1}|0\rangle \otimes |\downarrow\rangle \right\}$$

on $\mathcal{H}_n$, we have

$$\boxed{H_1 = (n + \tfrac{1}{2})\, \mathrm{Id}}$$

$$H_0 |n,\uparrow\rangle = k\,|n,\uparrow\rangle + |n+1,\downarrow\rangle, \quad H_0|n+1,\downarrow\rangle = (n+1)|n,\uparrow\rangle - k\,|n+1,\downarrow\rangle$$

$$H_0 = \begin{pmatrix} k & n+1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}$$

et donc $$\boxed{H_0^2 = (k^2 + n+1)\, \mathrm{Id}.}$$

et donc

$$e^{-2i\Omega H_0 t} = \cos 2\Omega_n t \; Id - i\frac{\Omega}{\Omega_n}\sin 2\Omega_n t \, . H_0$$

$$\Omega_n^2 = \Omega^2\left(k^2 + n+1\right)$$

on calcule ainsi simplement

$$\langle m,\uparrow|\; s^z(t)\,|n,\uparrow\rangle = \frac{1}{2}\,\delta_{n,m}\,\langle n|n\rangle\left[1 - 2\Omega^2(n+1)\,\frac{\sin^2\Omega_n t}{\Omega_n^2}\right]$$

Si on introduit l'état cohérent

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \qquad ; \; |n\rangle = (b^+)^n|0\rangle$$

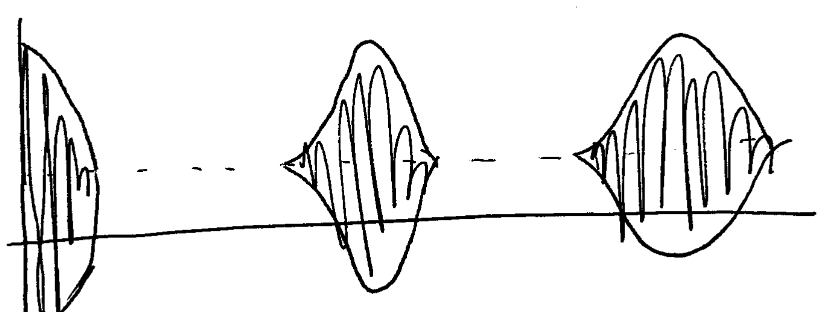
Le nombre moyen de photons dans cet état est

$$\bar{n} = |\alpha|^2$$

et on trouve

$$\boxed{w(t) = \frac{\langle\alpha\uparrow|\; s^z(t)\,|\alpha\uparrow\rangle}{\langle\alpha\downarrow|\; s^z(0)\,|\alpha\downarrow\rangle} = e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\left(1 - 2\Omega^2(n+1)\,\frac{\sin^2\Omega_n t}{\Omega_n^2}\right)}$$

Si on trace le graphe de cette expression, on voit apparaître le phénomène de "collapse" et "revival" des oscillations de Rabi :



Voir fig. 1.

on peut analyser cette courbe analytiquement [Narozhny et al 1981]

$$P(n) = e^{-\bar n} \frac{\bar n^n}{n!} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\bar n + n - n \log \frac{n}{\bar n}}$$

est très piquée autour de $n = \bar n$. On remplace la somme par une intégrale

$$w(t) \simeq \frac{\Omega^2}{2} \int_0^\infty \frac{dn}{\Omega^2(n)} P(n) \left[k^2 + n \cos 2\Omega(n) t \right]$$

Le point col est

$$\psi'(\eta_0) = 0$$

$$\psi(\eta) = \eta (1 - \log \eta) + \frac{2 i \Omega t}{\sqrt{\bar n}} \sqrt{\frac{k^2}{\bar n} + \eta} \qquad \eta = \frac{n}{\bar n}$$

ou encore

$$\boxed{\sqrt{\frac{k^2}{\bar n} + \eta_0}\ \log \eta_0 = \frac{i \Omega t}{\sqrt{\bar n}}} \qquad (*)$$

on obtient alors

$$w(t) = \frac{\Omega^2 k}{2 \Omega^2(\bar n) \sqrt{2\pi \bar n}} \left(1 + \frac{\bar n}{k^2} \operatorname{Re} \frac{e^{-\bar n (1 - \psi(\eta_0))}}{\sqrt{\psi''(\eta_0)}} \right)$$

Pour $t \simeq 0$ la solution est

$$\eta_0 = 1$$

$$e^{-\bar n (1 - \psi(\eta_0))} = e^{2 i \Omega_{Rabi} t} \quad ; \quad \Omega_{Rabi} = \Omega \sqrt{k^2 + \bar n}$$

on retrouve les oscillations de Rabi avec période

$$T_{Rabi} = \frac{2\pi}{\Omega} \frac{1}{\sqrt{k^2 + \bar n}}$$

lorsque t augmente

$$\gamma_0 \simeq 1 + i \frac{\Omega}{\Omega_{Rabi}} \Omega t$$

$$1 - f(\gamma_0) \simeq -2i \frac{\Omega t}{\sqrt{\bar{n}}} + \frac{\Omega^2 t^2}{2\bar{n}}$$

L'enveloppe des oscillations de Rabi est donnée par

$$e^{-\mathrm{Re}\left[\bar{n}(1 - f(\gamma_0))\right]} \simeq e^{-\frac{\Omega^2 t^2}{2}}$$

donc
$$\boxed{T_{Collapse} = \frac{2\pi}{\Omega} = T_{Rabi} \sqrt{k^2 + \bar{n}}}$$

Les "revival" correspondent au point col

$$\gamma_0 = e^{2ik\pi}$$

qui sont des solutions exactes de (*) pour

$$T_k = k\, T_{revival}$$

$$\boxed{T_{Revival} = \frac{2\pi}{\Omega} \sqrt{k^2 + \bar{n}} = T_{Rabi} \left(k^2 + \bar{n} \right)}$$

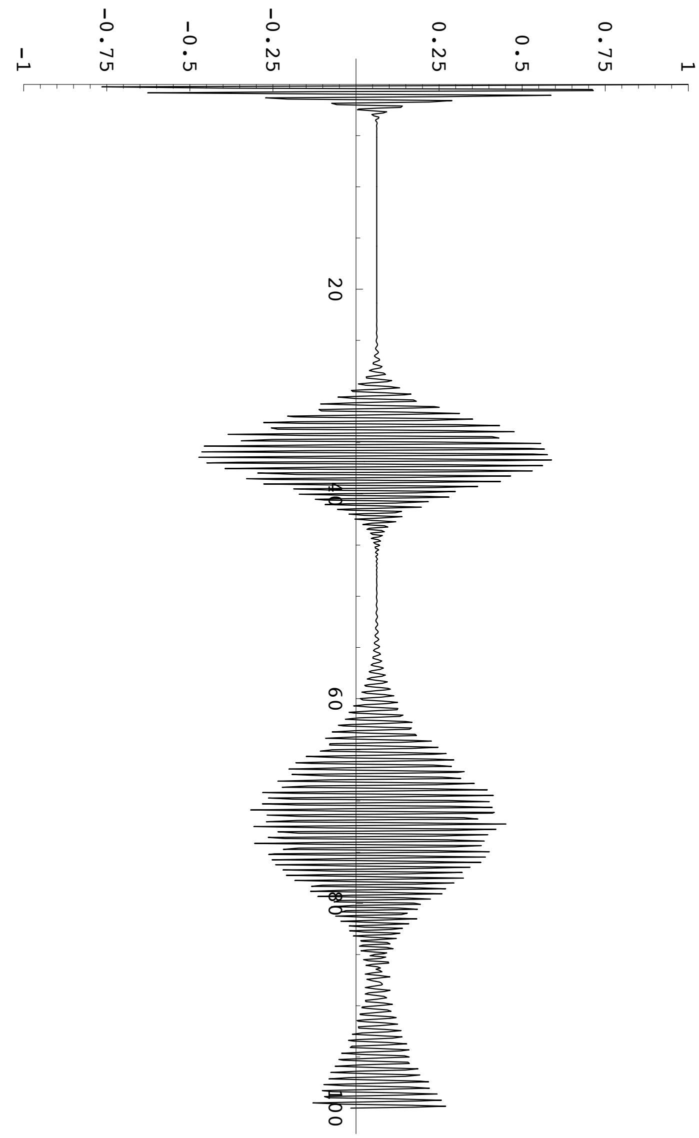


Figure 1: The collapses and revivals of Rabi oscillations. $\bar{n} = 30$, $\Delta = 2\sqrt{2}$, $\Omega = 1$.

III) Condensats d'atomes froids

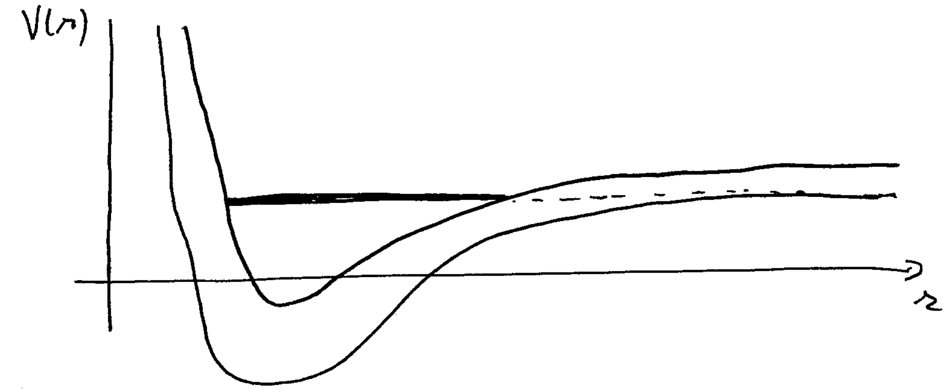
On considère des atomes d'alcalins comme Li, K, Na, ...
Soit $\vec{I}$ le moment magnétique du noyau, et $\vec{S}$ le spin de l'électron.
En choisissant l'isotope on peut s'arranger pour que l'atome soit un boson ou un fermion. On considère le cas fermionique

$$H = g\,\vec{I}\cdot\vec{S} + g_B\,\vec{S}\cdot\vec{B}$$

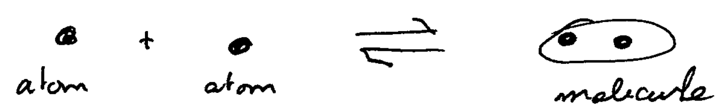
Pour 2 atomes

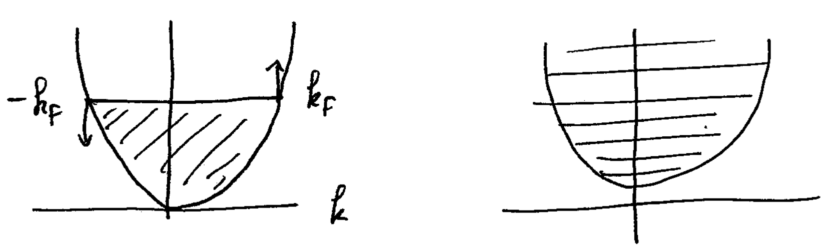
$$H = H_1 + H_2$$

Lorsque les atomes se rapprochent ils peuvent former des états liés.



Résonance de Feshbach : l'état lié est en résonance avec un état de diffusion. En changeant le champ magnétique on peut ajuster les niveaux.





Si $C^+_{k\sigma}$ et $C_{k\sigma}$ sont les opérateurs de création et annihilation des fermions dans l'état de spin σ et impulsion k on peut écrire l'interaction comme

$$\boxed{H = \sum_{k,\sigma} \epsilon_k c^+_{k\sigma} c_{k\sigma} + \omega b^+ b + g \sum_k b^+ c_{k\downarrow} c_{-k\uparrow} + b\, c^+_{k\downarrow} c^+_{-k\uparrow}}$$

Ceci peut être réécrit en termes de pseudo-spins

$$2 s^z_k = \sum_\sigma c^+_{k\sigma} c_{k\sigma} - 1$$

$$s^-_k = c_{k\downarrow} c_{-k\uparrow}$$

$$s^+_k = c^+_{k\downarrow} c^+_{-k\uparrow}$$

Si $\{c^+_{k,\sigma}, c_{k',\sigma'}\} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{kk'}$

alors $\vec{S}_k$ satisfait l'algèbre su_2.

et

$$\boxed{H = \sum_{j=0}^{n-1} 2 \epsilon_j s^z_j + \omega b^+ b + g \sum_{j=0}^{n-1} b^+ s^-_j + b\, s^+_j}$$

On retrouve le Hamiltonien de Jaynes-Cummings pour n spins $1/2$.

Ce système est intégrable (Yuzbashyan, Kuznetsov, Altshuler 2005)

C'est un cas spécial du modèle de Gaudin. Il est écrit explicitement dans le dernier chapitre de son livre (1983)

L'information a mis 20 ans à percoler entre les communautés.

IV Dynamique classique de formation des "paires de Cooper".

Le problème physique intéressant est le suivant.

On prépare dans un piège les atomes d'alcalins dans un état de diffusion. Puis au temps $t=0$ on modifie le champ magnétique pour que l'état moléculaire ait une énergie plus basse que l'état de diffusion. On mesure le nombre de molécules formées en fonction du temps. i.e. on prépare le système dans un état instable et on suit son évolution temporelle.

Voyons tout d'abord que le modèle de Jaynes Cummings est assez riche pour décrire une telle situation.

Au lieu de n spin $1/2$ considérons 1 spin s, histoire de garder les choses simples. Examinons la situation classique

$$H = 2\epsilon s^z + \omega b^+ b + (b^+ s^- + b s^+)$$

$$\{b, b^+\} = i \quad , \quad \{s^a, s^b\} = -\epsilon_{abc} s^c$$
$$\vec{s}^{\,2} = s_{cl}^2$$

Equations du mouvement

$$\begin{cases} \dot{b} = -i\omega b - i s^- \\ \dot{s}^z = i(b^+ s^- - b s^+) \\ \dot{s}^+ = 2i\epsilon s^+ - 2i b^+ s^z \\ \dot{s}^- = -2i\epsilon s^- + 2i b s^z \end{cases}$$

Cherchons les points d'équilibre $(\dot{b} = \dot{s}^a = 0)$

Ils sont donnés par

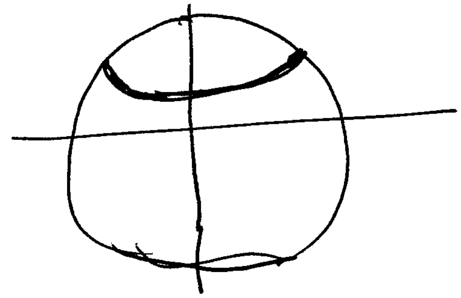
$$\boxed{s^- = -\omega b \qquad s^- = \frac{1}{\epsilon} b s^z}$$

on a deux types de solution

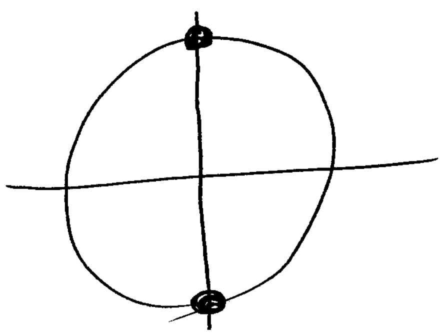
1) $b \neq 0 \Rightarrow s^z = -\epsilon\omega$

$$(s^z)^2 + s^+ s^- = s_{cl}^2 \Rightarrow b^+ b = \frac{1}{\omega^2}\left(s_{cl}^2 - \epsilon^2\omega^2\right)$$

$$H = -\frac{1}{\omega}\left(s_{cl}^2 + \omega^2\epsilon^2\right)$$



2) $b = 0 \Rightarrow s^- = 0 \Rightarrow s^z = \pm s_{cl}$



L'énergie d'une telle configuration est

$$H' = \pm 2\epsilon s_{cl}$$

Notez que $H - H' = -\frac{1}{\omega}\left(s_{cl} \pm \epsilon\omega\right)^2 < 0$

i.e. c'est la solution 1) qui est le fondamental.

Pour fixer les idées supposons $\epsilon < 0$, de sorte que la solution 2) d'énergie minimale est donnée par le spin up.

Examinons la stabilité de cet état.

On suppose $b, b^+, s^\pm$ du 1er ordre. Alors

$$s^z = s_{cl} + \delta s^z \qquad \delta s^z = -\frac{s^+ s^-}{2 s_{cl}} = \text{second ordre}$$

Les equations du mouvement linearisées sont donc ($g=1$!) (11)

$$\begin{cases} \dot{b} = -i\omega b - i s^- \\ \dot{s}^- = -2i\epsilon s^- + 2i s_{cl}\, b \end{cases}$$

Les modes propres sont de la forme

$$b(t) = b(0)\, e^{-2iEt} \qquad s^-(t) = s^-(0)\, e^{-2iEt}$$

La deuxieme equation donne

$$s^-(0) = -s_{cl} \frac{b(0)}{E-\epsilon}$$

et la premiere donne l'équation caractéristique

$$E = \frac{\omega}{2} - \frac{s_{cl}}{2} \frac{1}{E-\epsilon}$$

Le discriminant est

$$\Delta = k^2 - 2s_{cl} \qquad k = \epsilon - \frac{\omega}{2}$$

$\Rightarrow$ $\Delta > 0$ équilibre <u>stable</u>

$\Delta < 0$ équilibre <u>instable</u>

Dans le cas <u>stable</u> le mouvement classique est donc formé de petites oscillations autour du point d'équilibre.

Quel est le mouvement classique dans le cas <u>instable</u>?

Essayons de refaire au niveau classique le coup d'Ackerhalt

On a $H = \omega H_1 + H_0$

$$H_1 = b^+ b + s^z \qquad H_0 = 2k s^z + b^+ s^- + b s^+$$

Il est facile de voir que les equations du mouvement impliquent l'équation fermée suivante sur S^z :

$$\boxed{(\dot{S}^z)^2 = 4(S^z)^3 - 4(H_1 + k^2)(S^z)^2 + 4(kH_0 - S_{cl}^2)S^z + 4S_{cl}^2 H_1 - H_0^2}$$

C'est une equation de Weierstrass!

Mais le point instable est situé sur la surface de niveau

$$H_1 = S_{cl} \qquad H_0 = 2kS_{cl}$$

Pour ces valeurs l'equation dégénère!

$$(\dot{S}^z)^2 = 4(S^z - S_{cl})^2 (S^z + S_{cl} - k^2)$$

C'est à dire

$$\boxed{\dot{S}^z = 2(S^z - S_{cl})\sqrt{S^z + S_{cl} - k^2}}$$

La solution est donnée en terme de fonctions trigonometriques

$$\boxed{S^z(t) = S_{cl} - \frac{\Omega^2}{\mathrm{ch}^2\,\Omega(t-t_0)}, \qquad \Omega = \sqrt{2S_{cl} - k^2}}$$

et donc $n(t) = b^+b\,(t)$ est donné par

$$\boxed{n(t) = \frac{\Omega^2}{\mathrm{ch}^2\,\Omega(t-t_0)}}$$

V Dynamique semi-classique

Considérons le système quantique

$$H = H_0 + \omega H_1$$
$$H_1 = b^+ b + s^z$$
$$H_0 = 2 k s^z + b^+ s^- + b s^+$$

$$[b, b^+] = \hbar \qquad [s^+, s^-] = 2\hbar s^z \qquad [s^z, s^\pm] = \pm \hbar s^\pm$$
$$(s^z)^2 + \tfrac{1}{2}(s^+ s^- + s^- s^+) = \hbar^2 s(s+1)$$

Soit

$$e_n = (2 b^+)^n |0\rangle \otimes (s^+)^{M-n} |-s\rangle$$

on a

$$H_1 e_n = (M-s) e_n$$

$$H_0 e_n = 2\hbar k (M-s-n) e_n + \frac{\hbar^2}{2}(M-n)(2s+1-M+n) e_{n+1} + 2\hbar n e_{n-1}$$

Si

$$\psi = \sum_n (-1)^n P_n \frac{e_n}{\|e_n\|}, \qquad \|e_n\|^2 = \hbar^n 2s! \frac{(M-n)!\, n!}{(2s-M+n)!} \hbar^{M-n} 2^{2n}$$

l'équation de Schroedinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_0 \psi$$

devient

$$\boxed{i\hbar \partial_t P_n = \hbar^{3/2} \sqrt{(n+1)(2s+1-M+n)(M-n)}\, P_{n+1} + \hbar^{3/2} \sqrt{n(2s-M+n)(M+1-n)}\, P_{n-1} + 2\hbar k (M-s-n) P_n}$$

Si $M = 2s$, i.e. $H_1 e_n = s e_n$, cette équation devient

$$\boxed{i\hbar \partial_t P_n = \hbar^{3/2} (n+1)\sqrt{2s-n}\, P_{n+1} + \hbar^{3/2} n \sqrt{2s+1-n}\, P_{n-1} + 2\hbar k (s-n) P_n} \qquad (**)$$

On doit résoudre cette équation avec la condition initiale

$$P_n(t) = \delta_{n,0}$$

(que des atomes, pas de molécules)

Le nombre moyen de molécules en fonction du temps est

$$\langle s| e^{i\frac{Ht}{\hbar}} \, b^{+} b \, e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} |s\rangle = \hbar \sum_{n=0}^{2s} n \, |P_n(t)|^2$$

Approximation $n \ll 2s$

$$i\hbar \, \partial_t P_n = \hbar (n+1)\sqrt{2sk} \, P_{n+1} + \hbar n \sqrt{2sk} \, P_{n-1} + 2\hbar k (s-n) P_n(t)$$

en redéfinissant

$$P_n(t) \to e^{-i2ks t} P_n(t)$$

on élimine le terme en $2\hbar ks \, P_n(t)$ dans le membre de droite

On pose aussi $\qquad \hbar s = s_{cl}$

L'équation devient

$$i \, \partial_t P_n = \sqrt{2s_{cl}} \, (n+1) \, P_{n+1} + \sqrt{2s_{cl}} \, n \, P_{n-1} - 2k \, n \, P_n = 0$$

Pour résoudre cette équation on introduit la transformée de Laplace

$$Q(\lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \, e^{n\lambda} \quad , \qquad Q(\lambda, 0) = 1$$

$$i \, \partial_t Q = \left[\sqrt{2s_{cl}} \, (e^{\lambda} + e^{-\lambda}) - 2k \right] \partial_\lambda Q + \sqrt{2s_{cl}} \, e^{\lambda} Q = 0$$

on pose $\qquad Q(\lambda, t) = e^{w(\lambda)} \, q(\lambda, t)$

$$\begin{cases} \left(\sqrt{2s_{cl}} \, (e^{\lambda} + e^{-\lambda}) - 2k \right) \partial_\lambda w + \sqrt{2s_{cl}} \, e^{\lambda} = 0 \\ i \, \partial_t q = \left[\sqrt{2s_{cl}} \, (e^{\lambda} + e^{-\lambda}) - 2k \right] \partial_\lambda q \end{cases}$$

on trouve

$$W(\lambda) = \frac{k - i\Omega}{2i\Omega} \operatorname{Log}\left(e^{\lambda} - \frac{k - i\Omega}{\sqrt{2s}}\right) - \frac{k + i\Omega}{2i\Omega} \operatorname{Log}\left(e^{\lambda} - \frac{k+i\Omega}{\sqrt{2s}}\right) \qquad + \text{constante}$$

Introduisant ensuite $y(\lambda)$ par

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{i}{\sqrt{2s_d}\,(e^{\lambda}+e^{-\lambda}) - 2k}$$

Soit

$$y = -\frac{1}{2\Omega} \operatorname{Log} \frac{e^{\lambda} - \frac{k - i\Omega}{\sqrt{2s_0}}}{e^{\lambda} - \frac{k+i\Omega}{\sqrt{2s_d}}}$$

Alors

$$q(\lambda, t) = q_0(y+t)$$

La condition initiale nous dit que

$$q_0(y) = e^{-W(\lambda)}$$

on a

$$e^{\lambda} - \frac{k - i\Omega}{\sqrt{2s}} = -\frac{2i\Omega}{\sqrt{2s}} \frac{e^{-\Omega y}}{e^{\Omega y} - e^{-\Omega y}}$$

$$e^{\lambda} - \frac{k + i\Omega}{\sqrt{2s}} = -\frac{2i\Omega}{\sqrt{2s}} \frac{e^{\Omega y}}{e^{\Omega y} - e^{-\Omega y}}$$

et donc

$$W(\lambda) = -iky + \operatorname{Log}\left(e^{\Omega y} - e^{-\Omega y}\right) \qquad + \text{cste}$$

$$e^{W(y)} = e^{-iky} \operatorname{sh} \Omega y$$

$$q_0(y) = e^{iky} \frac{1}{\operatorname{sh} \Omega y}$$

Finalement

$$Q(\lambda,t) = e^{W(\lambda)}\, q_0(t+y) = e^{ikt}\, \frac{\operatorname{sh} \Omega y}{\operatorname{sh} \Omega(y+t)}$$

ce que l'on peut réécrire comme

$$Q(\lambda,t) = e^{-ikt}\, \frac{2i\Omega}{(k+i\Omega)e^{\Omega t}-(k-i\Omega)e^{-\Omega t}}\; \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2s}\,(e^{\Omega t}-e^{-\Omega t})}{(k+i\Omega)e^{\Omega t}-(k-i\Omega)e^{-\Omega t}}\, e^{\lambda}}$$

On en déduit que

$$P_n(t) = \frac{2i\Omega\, e^{-ikt}}{(k+i\Omega)\,e^{\Omega t}-(k-i\Omega)e^{-\Omega t}} \left[\frac{\sqrt{2s_{cl}}\,(e^{\Omega t}-e^{-\Omega t})}{(k+i\Omega)e^{\Omega t}-(k-i\Omega)e^{-\Omega t}}\right]^n$$

et donc

$$\boxed{|P_n(t)|^2 = \frac{\Omega^2}{2s_{cl}\,\operatorname{sh}^2\Omega t+\Omega^2}\left[\frac{2s_{cl}\,\operatorname{sh}^2\Omega t}{2s_{cl}\,\operatorname{sh}^2\Omega t+\Omega^2}\right]^n}$$

on voit que c'est de la forme

$$\boxed{|P_n(t)|^2 = e^{-\beta(t)n} \qquad \beta(t) = \log\left(1+\frac{\Omega^2}{2s_{cl}\,\operatorname{sh}^2\Omega t}\right)}$$

C'est un spectre thermique avec une température effective dépendant du temps.

Finalement

$$\boxed{\langle b^+ b\rangle(t) = \hbar\, \frac{2s_{cl}}{\Omega^2}\, \operatorname{sh}^2 \Omega t}$$

Dans le cas stable $\Omega \to i\Omega$

$$\boxed{\langle b^+ b\rangle(t) = \hbar\, \frac{2s_{cl}}{\Omega^2}\, \sin^2 \Omega t}$$

L'approximation reste valable à tous les temps (Voir fig. 2)

Cette solution est valable tant que

$$\langle b^\dagger b\rangle(t) \ll 2S_{cl}$$

Au delà il faut faire une autre approximation dans l'équation de Schroedinger (**) que l'on récrit comme

$$i\hbar\, \partial_t P(x,t) = (x+\hbar)\sqrt{2S_{cl}-x}\; P(x+\hbar,t) + x\sqrt{2S_{cl}+\hbar-x}\; P(x-\hbar,t)$$
$$- 2k\, x\, P(x,t)$$

où on a posé $x = n\hbar$

On pose $P(x,t) = e^{i\frac{W(x)}{\hbar}}\, a(x,t)$

on obtient

$$+i\hbar\,\dot a = (x+\hbar)\sqrt{2S_{cl}-x}\; e^{\frac{i}{\hbar}(W(x+\hbar)-W(x))}\, a(x+\hbar)$$
$$+ x\sqrt{2S_{cl}-x+\hbar}\; e^{\frac{i}{\hbar}(W(x-\hbar)-W(x))}\, a(x-\hbar)$$
$$- 2kx\, a(x)$$

Si $\underline{\hbar \ll x \ll 2S_{cl}}$ on peut découpler ces équations

$$\begin{cases} \sqrt{2S_{cl}-x}\,\cos W' - kx = 0 & (***) \\ i\,\dot a = 2i\, x\sqrt{2S_{cl}-x}\;\sin W'\cdot a' + \\ \quad \left[\sqrt{2S_{cl}-x}\; e^{iW'} + \dfrac{x}{2\sqrt{2S_{cl}-x}}\, e^{-iW'} + i x\sqrt{2S_{cl}-x}\,\cos W'\cdot W''\right] a \end{cases}$$

La première équation n'est autre que l'équation de Hamilton-Jacobi sur la variété critique. Il s'agit donc de l'approximation WKB.

La solution est

$$i\, W(x) = i k \sqrt{\Omega^2 - x} + (x - 2s) \operatorname{Log} \frac{k + i\sqrt{\Omega^2 - x}}{\sqrt{s - x}}$$

$$a(x,t) = a_0(x)\, a_1(x,t)$$

$$a_0(x) = e^{-ikt} \frac{1}{\left[x^2(\Omega^2 - x)\right]^{1/4}} \left(\frac{k - i\sqrt{\Omega^2 - x}}{k + i\sqrt{\Omega^2 - x}} \right)^{1/4}$$

$$a_1(x,t) = A_0\left(t - u(x)\right)$$

$$u(x) = -\int^x \frac{1}{2x\sqrt{\Omega^2 - x}}\, dx$$

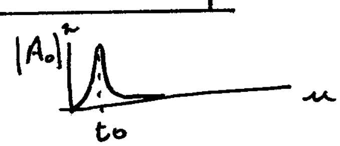
ou encore $\quad x = \dfrac{\Omega^2}{\mathrm{ch}^2\, \Omega u}$

On a ensuite

$$\langle b^+ b\rangle(t) = \int dx \; x \frac{1}{\left[x^2(\Omega^2 - x)\right]^{1/2}} \left| A_0(t-u)\right|^2$$

$$\boxed{\langle b^+ b\rangle(t) = \int du \, \frac{\Omega^2}{\mathrm{ch}^2\, \Omega u} \left| A_0(t-u)\right|^2}$$

Si $\quad |A_0(u)|^2 = \delta(u - t_0)$



$$\boxed{\langle b^+ b\rangle(t) = \frac{\Omega^2}{\mathrm{ch}^2\, \Omega(t - t_0)}}$$

on peut évaluer t_0 facilement en recollant avec la formule à petit temps.

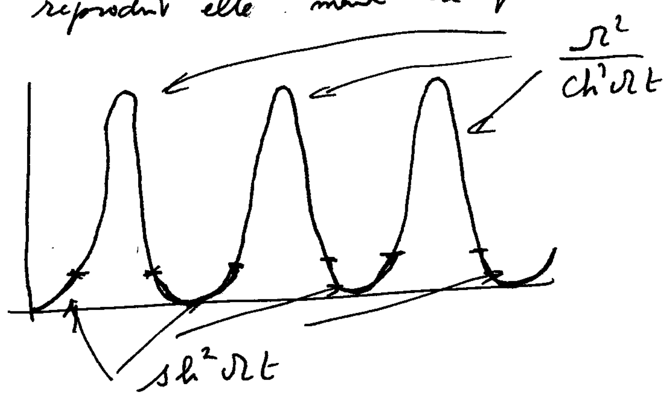
$$\hbar \frac{2 S_{cl}}{\Omega^2} \operatorname{sh}^2 \Omega t \simeq \frac{\Omega^2}{\operatorname{ch}^2 \Omega (t-t_0)}$$

i.e. $$\hbar \frac{2 S_{cl}}{\Omega^2} \frac{1}{4} e^{2\Omega t} \simeq 4 \Omega^2 e^{2\Omega(t-t_0)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_0 = -\frac{1}{2\Omega} \log \frac{2 S_{cl} \hbar}{16 \Omega^4} \simeq -\frac{1}{2\Omega} \log \hbar}$$

On reproduit très bien la position et la largeur du premier pic (voir fig. 3). La hauteur du pic est bien reproduite si on prend la vraie fonction $|A_0(t-u)|^2$ au lieu de $\delta(u-t_0)$.

Si on reste avec l'approximation en $\delta(u-t_0)$, il est clair que la situation se reproduit elle même en fonction du temps.



et en première approximation (voir fig. 3)

$$\langle b^+ b \rangle (t) = \sum_k \frac{\Omega^2}{\operatorname{ch}^2 \Omega (t - (2k+1) t_0)}$$

L'équation (***) est effectivement l'équation d'Hamilton Jacobi sur la variété critique. En effet, on a

$$\begin{cases} b^+ b + s^z = H_1 = s_{cl} & \Rightarrow \quad s^z = s_{cl} - n \\ 2k\, s^z + b^+ s^- + b s^+ = E & \\ s_z^2 + s^+ s^- = s_{cl}^2 & \Rightarrow \quad s^\pm = \sqrt{s_{cl}^2 - s^{z2}}\, e^{\mp i \varphi} \end{cases}$$

et donc

$$s^\pm = \sqrt{n(2s_{cl} - n)}\, e^{\mp i\varphi} \qquad b = \sqrt{n}\, e^{-i\theta}, \quad b^+ = \sqrt{n}\, e^{i\theta}$$

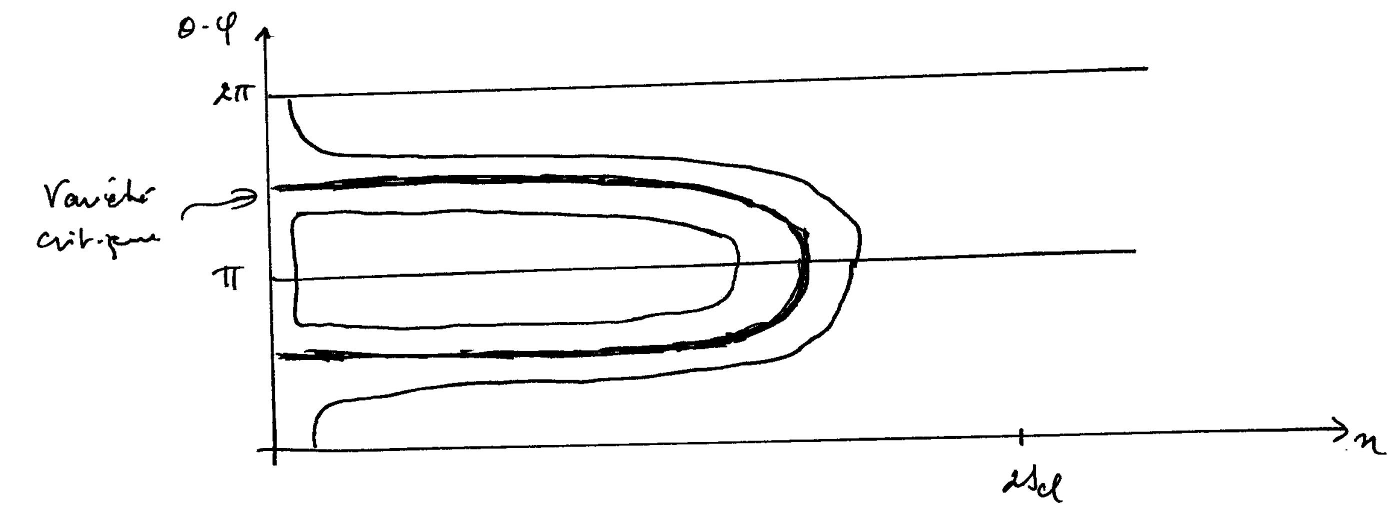
En reportant dans E :

$$\boxed{n\sqrt{2s_{cl} - n}\, \cos(\theta - \varphi) - kn = \frac{E - 2ks}{2} = 0 \quad \text{sur variété critique}}$$

La variable conjuguée de n est effectivement $\theta - \varphi$. En effet la forme symplectique est

$$\boxed{\omega = -i\, \delta b \wedge \delta b^+ + i\, \frac{\delta s^+}{s^+} \wedge \delta s^+ = \delta n \wedge \delta(\theta - \varphi).}$$

Dans l'espace de phases $(n, \theta-\varphi)$ les variétés de niveaux ressemblent à :



Noter que l'axe $n = 0$ correspond en fait à un seul point dans l'espace des phases.

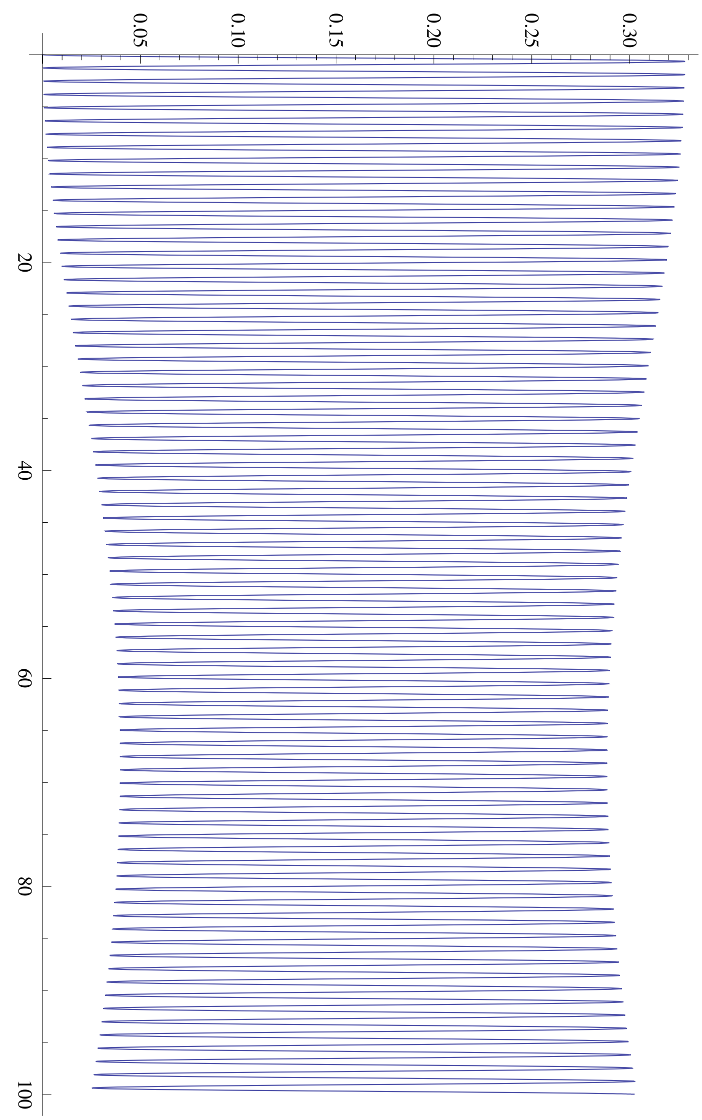


Figure 2: The oscillations molecule formation in the STABLE case. The amplitude remains small and the $2\hbar s_{cl}\frac{\sin^2 \Omega t}{\Omega^2}$ formula is essentially exact.

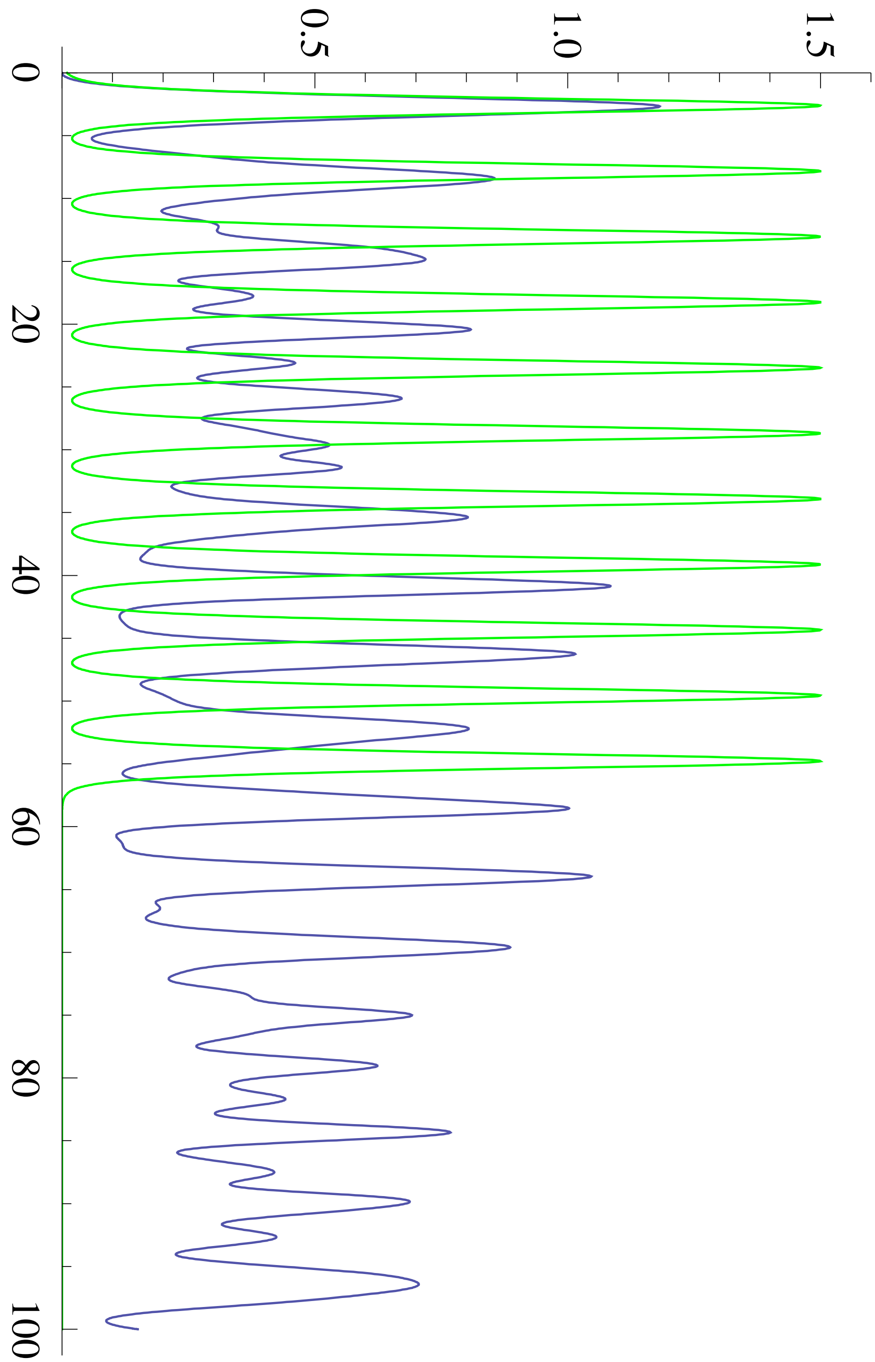
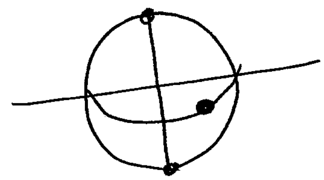


Figure 3: The oscillations molecule formation in the UNSTABLE case. The blue curve is the exact numerical calculation, The green curve corresponds to the formula $\sum_k \frac{\Omega^2}{\cosh^2 \Omega(t-(2k+1)t_0)}$.

VI Le cas super-radiant

Considérons maintenant ce qui se passe lorsqu'on part d'un point initial qui n'est pas le point instable : disons

$$b = 0 \,, \quad s^z = 0$$



i.e. un point sur l'équateur.

Dans ce cas on a $H_1 = 0$. L'espace de Hilbert réduit est

$$\left\{ (b^+)^{s-n} |0\rangle \otimes (s^+)^n |-s\rangle \right\}$$

L'equation de Schroedinger devient

$$i\hbar \partial_t P_n = \hbar^{3/2} \sqrt{(n+1)(s+1+n)(s-n)}\, P_{n+1} + \hbar^{3/2} \sqrt{n(s+n)(s+1-n)}\, P_{n-1}$$
$$- 2 \hbar k n P_n$$

Si $n \ll s$, l'equation devient

$$\boxed{i \partial_t P_n = \sqrt{\hbar}\, s \sqrt{n+1}\, P_{n+1} + \sqrt{\hbar}\, s \sqrt{n}\, P_{n-1} - 2 k n P_n}$$

on pose

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} w_n$$

$$i \partial_t w_n = \sqrt{\hbar}\, s\, w_{n+1} + \sqrt{\hbar}\, s\, n\, w_{n-1} - 2 k n w_n$$

On cherche à nouveau une solution avec $P_n(t=0) = w_n(t=0) = \delta_{n0}$

Cette equation étant linéaire en n on la résoud par transformée de Laplace

$$w_n = \int e^{nz} f(z)\, dz$$

On trouve l'equation pour $f(z)$

$$i \partial_t f = \sqrt{\hbar}\, s\, (e^z + e^{-z}) f - \sqrt{\hbar}\, s\, (e^{-z} - a) \partial_z f$$

où $\qquad a = \frac{2k}{\sqrt{\hbar}\, s}$

posant $\tau = \sqrt{\hbar}\, s\, t$

$$i\,\partial_\tau \operatorname{Log} f = (e^{z} + e^{-z}) - (e^{-z} - a)\,\partial_z \log f$$

$$f = f_1 f_0$$

$$\begin{cases} \partial_z \operatorname{Log} f_0 = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{e^{-z} - a} \\ i\,\partial_\tau \operatorname{Log} f_1 = -(e^{-z} - a)\,\partial_z \log f_1 \end{cases}$$

on pose $u = e^{z}$

$$\begin{cases} f_0(u) = u\, e^{-\frac{1}{a}u} \dfrac{1}{(1-au)^{1+1/a^2}} \\ f_1(\tau, u) = A_0\left(i\tau - \frac{1}{a}\log(1-au)\right) \end{cases}$$

et donc

$$w_n = \int du\; u^n \frac{e^{-\frac{1}{a}u}}{(1-au)^{1+1/a^2}}\, A_0\left(i\tau - \frac{1}{a}\log(1-au)\right)$$

Dans le cas <u>résonnant</u> $a \to 0$

$$\frac{e^{-\frac{1}{a}u}}{(1-au)^{1+1/a^2}} \to e^{\frac{u^2}{2}}$$

$$i\tau - \frac{1}{a}\log(1-au) \to i\tau + u$$

En choisissant

$$A_0(i\tau + u) = \frac{1}{v\tau + u}$$

et en prenant le contour d'intégration autour du pole $-i\tau$ on trouve

$$w_n = \int_C \frac{u^n e^{+\frac{u^2}{2}}}{u+i\tau} du = (-i)^n e^{-\frac{\tau^2}{2}} \tau^n$$

qui est bien tel que $w_n(\tau=0) = \delta_{0n}$

On a donc dans ce cas

$$P_n(t) = (-i)^n \frac{e^{-\frac{\tau^2}{2}} \tau^n}{\sqrt{n!}}$$

c'est à dire

$$|P_n(t)|^2 = e^{-\bar{n}(t)} \frac{(\bar{n}(t))^n}{n!} \quad ; \quad \bar{n}(t) = \tfrac{1}{2} s^2 t^2$$

On a bien une distribution de Poisson correspondant à un état cohérent.

Dans le cas non resonnant, on prend

$$A_0\left(i\tau - \frac{1}{a}\log(1-au)\right) = \frac{1}{e^{i\tau - \frac{1}{a}\log(1-au)} - 1}$$

$$= \frac{1-au}{1-e^{ia\tau} - au}$$

et on prend le contour d'intégration autour du pole $u = \frac{1}{a}(1-e^{ia\tau})$

on obtient

$$w_n = \int du \quad u^n \quad \frac{e^{-\frac{1}{a}u}}{(1-au)^{1/a^2}} \quad \frac{1}{1-e^{iat}-au}$$

$$w_n = \left(\frac{1-e^{iat}}{a}\right)^n \; e^{-\frac{1}{a^2}(1-e^{iat})} \quad e^{-\frac{it}{a}}$$

En suite $\quad |1-e^{iat}|^2 = 2-2\cos at$

$$|P_n|^2 = \frac{1}{n!}\left(\frac{2(1-\cos at)}{a^2}\right)^n e^{-\frac{2}{a^2}(1-\cos at)}$$

$$= e^{-\bar{n}(t)} \quad \frac{(\bar{n}(t))^n}{n!}$$

$$\bar{n}(t) = \frac{2(1-\cos at)}{a^2}$$