

Equations du mouvement $\dot{X} = P(X)$
 (usuellement rationnel après ch^r de variable approprié) tel qu'il existe suffisamment de quantités conservées en involution.

On s'intéresse au cas où on peut écrire ceci sous la forme

$$\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), M(\lambda)]$$

L est une matrice $N \times N$ dépendant analytiquement d'un paramètre "spectral" λ .
 Ceci est une identité en λ équivalente aux équations du mv.

Courbe spectrale. $L(\lambda)_t$ est de la forme $U(t) L(\lambda)_0 U(t)^{-1} \Rightarrow$

$$\det (L(\lambda) - \mu I)$$

reste constant au cours du temps. Les quantités conservées sont cachées parmi les coefficients de cette expression.

La courbe $R(\lambda, \mu) \equiv \det (L(\lambda) - \mu I) = 0$ est la courbe spectrale.

C'est l'objet principal de notre étude.

Exemples

Neumann

Point sur une sphère de rayon R ②
avec des forus de rappel $-a_K X_K$.

$$\ddot{X}_K = -R^2 a_K X_K - X_K \sum_e (\dot{X}_e^2 / R^2 - a_e X_e^2)$$

Matrice de Lax $\dot{L} = [L, M]$

M s'exprime simplement sur L . (*)

$$L(\lambda) = L_0 + \sum_K \frac{1}{\lambda - a_K} L_K$$

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_K = g_K \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g_K^{-1}$$

$$g_K = \begin{pmatrix} X_K & 0 \\ P_K & X_K^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{Orbite coadjointe.}$$

P_K est le moment conjugué de X_K .

$$L = \begin{pmatrix} -v & u \\ -w & v \end{pmatrix} \quad u = \sum \frac{X_K^2}{\lambda - a_K} \quad v = \sum \frac{X_K P_K}{\lambda - a_K}$$
$$w = 1 + \sum \frac{P_K^2}{\lambda - a_K}$$

Courbe Spectrale

$$\det(L(\lambda) - \mu) = 0 = \mu^2 - v^2 + uw = \mu^2 + \sum \frac{F_K}{\lambda - a_K}$$

$$F_K = X_K^2 + \sum_{e \neq K} \frac{J_{Ke}^2}{a_K - a_e}$$

$$J_{Ke} = P_K X_e - P_e X_K$$

F_K : quantités conservées en involution

$$\sum F_K = \sum X_K^2 = R^2$$

(*) En fait on peut prendre

$$M(\lambda') = \frac{1}{\lambda - \lambda'} L(\lambda')$$

Toda

Chaîne de Toda fermée

(2)

$$\dot{q}_i = p_i \quad \dot{p}_i = 2 \left(e^{2(q_{i-1} - q_i)} - e^{2(q_i - q_{i+1})} \right)$$

$$(p_0, q_0) = (p_{n+1}, q_{n+1}) \quad (p_1, q_1) = (p_{n+2}, q_{n+2})$$

Expériences numériques Fermi Pasta UCam

Matrice de Lax

$$a_i = e^{q_i - q_{i+1}}$$

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} p_1 & a_1 & 0 & \dots & \lambda^{-1} a_{n+1} \\ a_1 & p_2 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n+1} & 0 & \dots & a_n & p_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\prod a_k = 1$$

$$\sum p_k = 0$$

Courbe Spectrale

$$(\lambda + \lambda^{-1}) \prod_{k=1}^{n+1} a_k - 2t(\mu) = 0$$

$$2t(\mu) = \mu^{n+1} - \mu^n \sum_{i=1}^{n+1} p_i + \dots$$

Posant $\rho = \lambda - t(\mu)$

$$\lambda^2 - 2t\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \rho^2 = t^2(\mu) - 1$$

= polynôme de degré $2(n+1)$ en μ

dependant de n paramètres "dynamiques"

coeffs ce $\mu^0, \mu^2, \dots, \mu^{n-1}$

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & \dots & \lambda^{-1} a_{n+1} \\ a_1 & 0 & -a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{n+1} & \dots & 0 & a_n & 0 \end{pmatrix}$$

Calogero

N points, matrice L taille $N \times N$

$$L_{ij} = p_i \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij}) \Phi(q_i - q_j; \lambda)$$

$\uparrow$ diagonal $\uparrow$ hors diagonal.

p_i : moment associé $\Rightarrow p_i = \dot{q}_i$

$$\Phi(q; \lambda) = \frac{\sigma(\lambda - q)}{\sigma(\lambda) \sigma(q)} e^{\zeta(\lambda) q}$$

$$\Rightarrow \Phi(q, \lambda) \propto 1/q \quad \text{pour } q \rightarrow 0$$

Calogero à spin

Matrice $N \times N$, "dynamique"

$$L_{ij} = p_i \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij}) \overline{F}_{ij} \Phi(q_i - q_j; \lambda)$$

$\overline{F}_{ij}$ est la variable dynamique "de spin"

$$\{ \delta_{ij}, \overline{F}_{jk} \} = -\delta_{jk} \overline{F}_{ie} + \delta_{ei} \overline{F}_{kj}$$

restreinte $\overline{F}_{ii} = 1$.

$$\begin{cases} H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \overline{F}_{ij} \overline{F}_{ji} V(q_i - q_j) \\ V(q) = \mathcal{P}(q) \propto 1/q^2 \quad q \rightarrow 0 \end{cases}$$

En faisant dériver les périodes de la fonction elliptique, on a le cas :

- trigonométrique

$$\begin{aligned} L_{ij} &= p_i \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij}) \overline{f}_{ij} (\coth q_{ij} - \coth \lambda) \\ V(q) &= 1/\sinh^2 q \end{aligned}$$

- rationnel

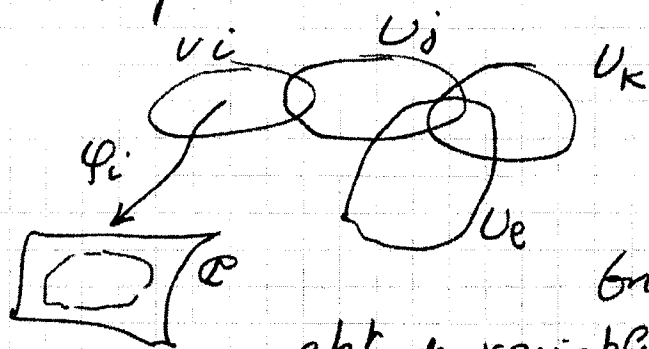
$$\Phi \rightarrow \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\lambda} \right) \quad V(q) \rightarrow \frac{1}{q^2}$$

Courbe et surface de Riemann

(5)

Une courbe $R(\lambda, \mu) = 0$, polynôme de degré N en μ peut être vue comme une surface de Riemann, présentée comme un revêtement à N feuillets de $\mathbb{A}^1$

Surface de Riemann : Variété analytique complexe de dimension 1, compacte.



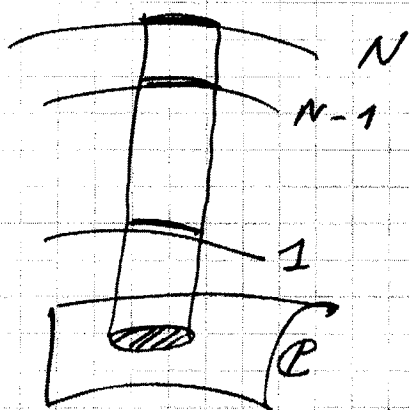
$U_i \cap U_j$ est envoyé sur $\mathbb{C}$ par ϕ_i et ϕ_j

On demande que ϕ

est de variables $z_i \leftrightarrow z_j$ soit analytique et bijectif. Compacte $\Rightarrow$ pas de trous, de points singuliers, etc.

Courbe $\Rightarrow$ Surface

$R(\lambda, \mu) = 0 \Rightarrow \mu = \mu_1(\lambda) \dots \mu_N(\lambda)$
au voisinage de λ tel qu'il y ait N racines distinctes.



Ceci définit des ouverts et le paramètre local λ

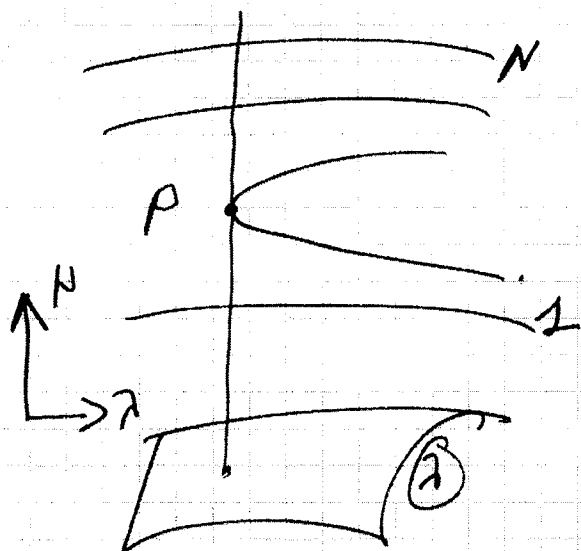
Si $\partial_\lambda R \neq 0$ $\partial_\mu R \neq 0$
on peut faire cela soit avec λ soit avec μ

(théorème des fonctions implicites)

Cas particuliers : points de branchement
Singuliers.

Points de branchement

⑥



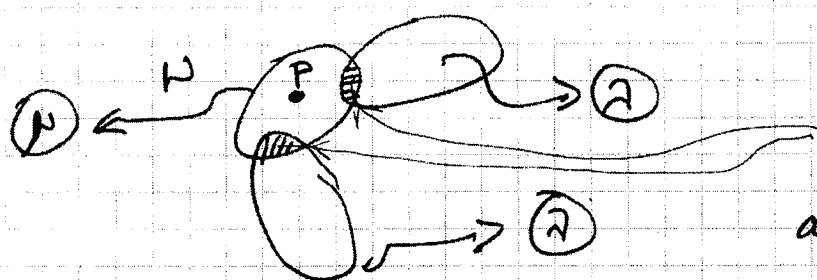
Au point P

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = - \frac{\partial_{\lambda} R}{\partial_{\mu} R} = \infty$$

donc $\partial_{\mu} R = 0$

Supposant $\partial_{\lambda} R \neq 0$

on prend μ comme paramètre local et on exprime $\lambda = \lambda(\mu)$



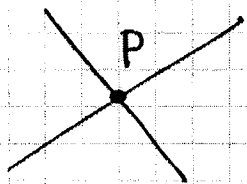
Ici

$$\lambda \leftrightarrow \mu$$

analytiquement

Point singulier

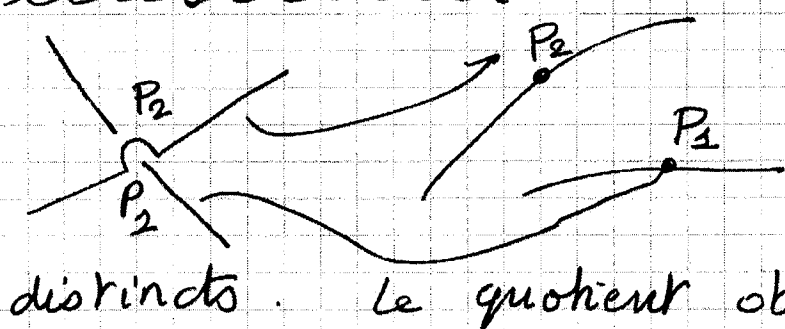
Points où $\partial_{\lambda} R = \partial_{\mu} R = 0$ (sur la courbe $R=0 \Rightarrow$ génériquement il n'y en a pas, pratiquement il y en a).



Typiquement

$$R(\lambda, \mu) = \lambda^2 + \mu^2 + \text{ordre supérieur}$$

De'singularisation



On regarde ceci comme 2 branches avec 2 pts P_1, P_2

Le quotient obtenu en identifiant

P_1 et P_2 est la courbe singulière ⑦
 "naïve" ayant un seul point singulier P .
 Au total on obtient ainsi une courbe
compacte, pas de trou, pas de p^h
 singulier, et un revêtement "branché"
 à N feuilletts de la "sphère de Riemann"!

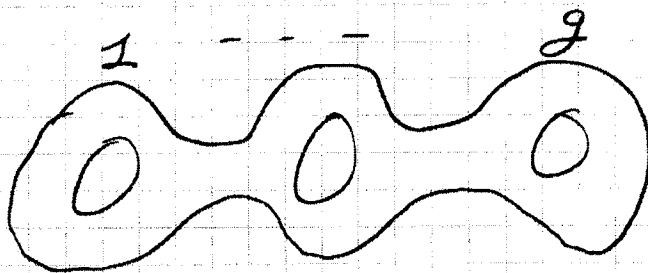
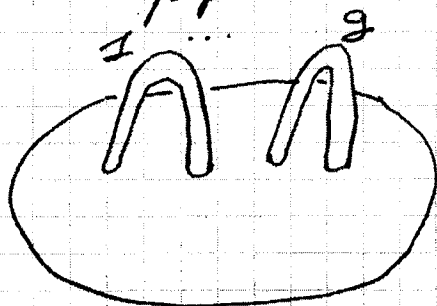
Surface de Riemann

Une surface de Riemann est orientable
 car $z_i \rightarrow z_j$ analytique préserve l'orientation
 Il y a une classification topologique des
 surfaces orientables compactes :

sphère à g poignées

g s'appelle le

GENRE



Attention! Sur une surface de genre g
 on peut plaquer $\dim(3g - 3)$ ($g \geq 2$)
 structures complexes $\hookrightarrow$ Espace des MODULES.

Preuves topologiques

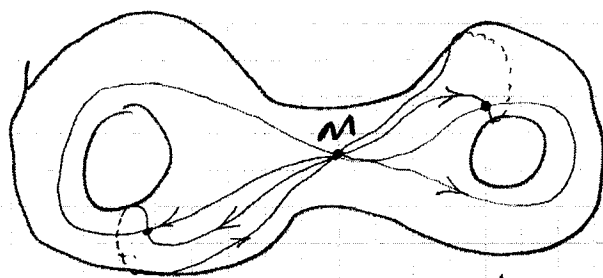
- Triangulation
- Théorie de Morse

Springer Introduction to
 Riemann surfaces

A. Gramain Topologie des surfaces

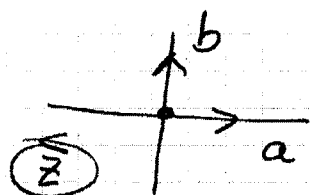
Dissection d'une surface de Riemann

8



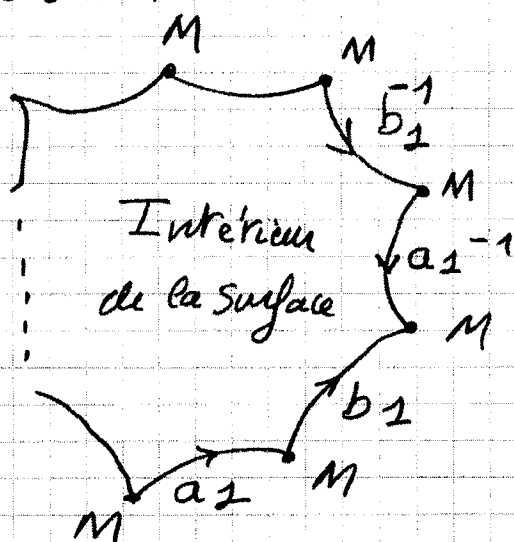
Sur une surface de genre g on peut tracer des chemins $a_1 \dots a_g \quad b_1 \dots b_g$

tels que $i(a_k, b_e) = \delta_{ke}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Indice} \\ \text{d'intersection} \end{array} \right.$
 $i(a_k, a_e) = i(b_k, b_e) = 0$



Intersection simple
 et dans le sens direct
 $\Rightarrow$ contribution $+1$

Tout autre chemin s'écrit $\sum (n_k a_k + m_k b_k)$.
 Si on découpe la surface de Riemann selon les chemins ci-dessus, on obtient la dissection :



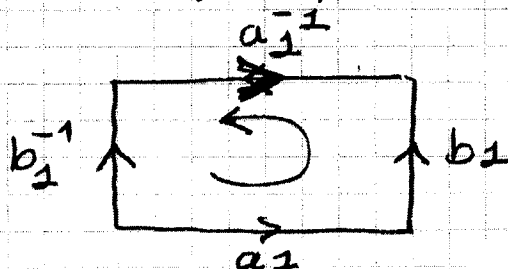
Les bords
 vérifient

$$\prod (a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}) = 1$$

Réciproquement si on considère ce polygone avec les identifications marquées on fabrique la surface.

Exemple : Torus

$$g = 1$$



Fonctions sur une surface de Riemann

(9)

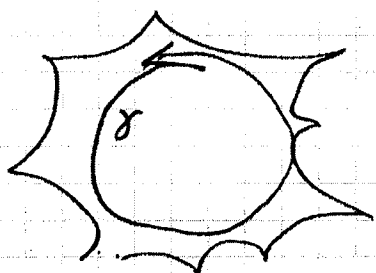
Une fonction est analytique, méromorphe, etc. si elle l'est dans chaque U_j exprimée sur le paramètre local z_j .

Liouville Pas de fonction analytique partout sur une surface de Riemann.

Mais il existe des fonctions méromorphes (avec des pôles. Résultat non trivial).

L'ensemble de ces fonctions forme un corps, le corps des fonctions méromorphes sur la surface.

Théorème (Rouché) Une fonction a autant de zéros que de pôles sur une surface de Riemann.



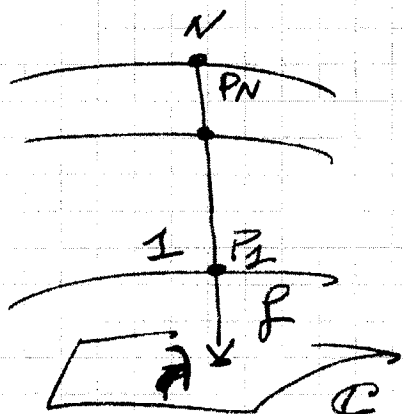
$$\int_{\sigma} \frac{df}{f} = 2i\pi \sum \text{Résidus}$$
$$= 0 \quad \text{car} \left(\int_{a_k} + \int_{a_k'} \right) \frac{df}{f} = 0$$

Appliquant ceci à $f \rightarrow f - a$:

Prop f prend chaque valeur exactement N fois (N est le nombre de pôles).

Réciproque

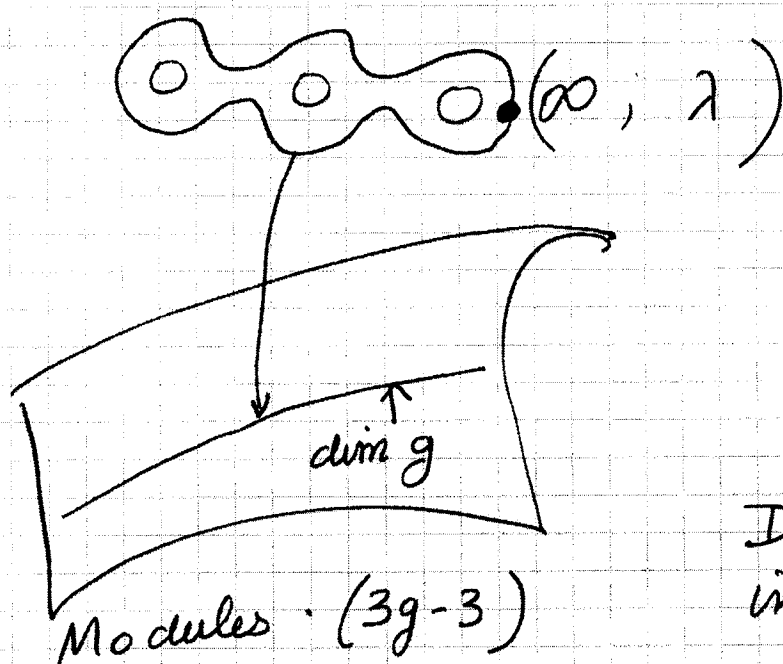
Surface $\rightarrow$ Courbe.
(voir Springer)



f définit un revêtement à N feuillets de $\mathbb{C}$.

Prenez une deuxième fonction g
 et formons $(N - g(P_1))(N - g(P_2)) \cdots (N - g(P_N))$
 Pour $P_1 \cdots P_N$ au dessus de $\mathbb{A}^1 \setminus \{0, 1, \lambda\}$.
 Les $g(P_j)$ sont localement analytiques en λ .
 Les fonctions symétriques élémentaires ne
 dépendent pas de l'ordre des feuillettes $\Rightarrow$
 sont des fonctions de λ pures, analytiques.
 Donc Ceci définit une courbe $R(\lambda, N) = 0$
 et pour tout point P générique $R(f(P), g(P)) = 0$
 donc par prolongement $R(f, g) = 0$
 R est rationnelle en λ car g n'a que des pôles au plus

Système intégrable abstrait



On verra qu'un
 système intégrable
 a g "variables
 d'action" et g
 "variables d'angle"

Donc un système
 intégrable est défini

par une famille de dimension g de surfaces
 de Riemann auxquelles on adjoint un
 paramètre local commun λ avec $\lambda \rightarrow \infty$.

Exemple Courbe hyperelliptique. (11)

Sur laquelle existe une fonction avec un pôle double : λ . Donc λ prend 2 fois chaque valeur, et on peut trouver μ dans le corps de fonctions telle que l'équation soit :

$$\mu^2 = P(\lambda) \quad P(\lambda) = \prod_{k=1}^N (\lambda - \lambda_k)$$

$(\lambda, \mu) \rightarrow \lambda$ est un revêtement à 2 feuillets avec des pts de branchement en $\lambda = \lambda_k$.

~~$\partial_\lambda R = 0$~~ $\partial_\mu R = 0 \Rightarrow \mu = 0$ mais alors $\partial_\lambda R \neq 0$
donc pas de pts singuliers sauf à l' ∞ .

Points à l' ∞ singulier $\lambda \rightarrow 1/\lambda \quad \mu \rightarrow 1/\mu$

$$\lambda^N = \mu^2 \prod_{k=1}^N (1 - \lambda \lambda_k) \quad \lambda \rightarrow 0$$

• N pair $(\lambda, \mu) \longleftrightarrow (\lambda, \mu \lambda^{N/2})$

Transformation birationnelle : changement de "base" dans le corps de fonction, bijectif

$$1 = \mu^2 \prod (1 - \lambda \lambda_k)$$

Donc on a 2 branches désingularisées

$$\mu = 1 + o(\lambda) \quad \mu = -1 + o(\lambda)$$

et deux points à l' ∞ .

$$\boxed{B = N}$$

• N impair

$$(\lambda, \mu) \longleftrightarrow (\lambda, \mu \lambda^{(N-1)/2})$$

$$\lambda = \mu^2 \prod (1 - \lambda \lambda_k) \Rightarrow \mu^2 = \lambda + o(\lambda^2)$$

$$\boxed{B = N+1}$$

On a 1 point à l' ∞ qui est un pt de branchement du revêtement $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda$.

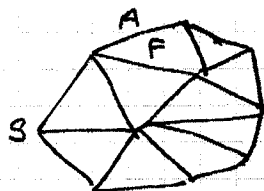
Calcul du genre

(12)

Partie topologique

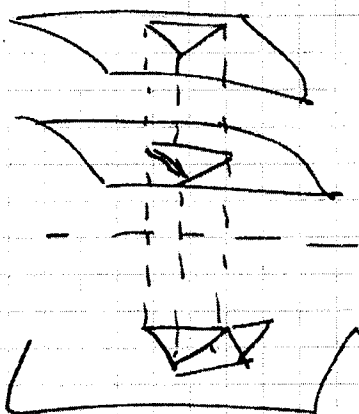
Si la surface est triangulée, caractéristique d'Euler Poincaré

$$\chi = F - A + V = 2 - 2g$$



Preuve en partant de la forme dissectée.

Ensuite on utilise le revêtement à N feuilletés pour projeter la triangulation sur la base, en mettant des points de branchement sur des sommets



Soit B le nombre de points de branchement et F, A, V les nombres sur la base. En haut

on a $NF, NA, NV - B$

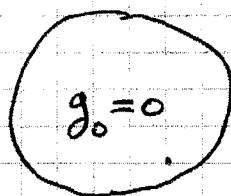
$$\Rightarrow \chi = N\chi_0 - B$$

Soit

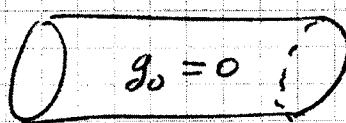
$$2g - 2 = N(2g_0 - 2) + B$$

Riemann - Hurwitz

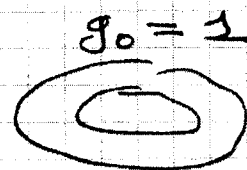
Selon que la base est



↑
cas rationnel



↑
cas trigo



↑
cas elliptique

Partie analytique

Il faut compter le nombre de pts de branchement. $R(\lambda, \mu) = 0$ $\deg_{\mu} R = N$

$$R = \partial_{\mu} R = 0 \quad \text{Supposons } R \text{ polyn.}$$

Il y a $N(N-1)$ pts de branchement (théorème de Bezout)

Preuve : $\partial_{\mu} R$ est une fonction sur la surface qui a autant de zéros que de pôles.

les pôles sont à l' ∞ . R possède N

branches $\mu = \mu_k(\lambda) \quad k=1, \dots, N \quad \lambda \rightarrow \infty$

sur chacune desquelles μ a un pôle simple

$\Rightarrow \partial_{\mu} R \propto \mu^{N-1}$ un pôle d'ordre $(N-1) \Rightarrow$

$N(N-1)$ pôles. Si la base est une sphère

$$g = \frac{1}{2} B - N + 1 = \frac{(N-1)(N-2)}{2}$$

Ce qui est bien le genre de la courbe générique.

le genre diminue quand il y a des pts singuliers.

Application aux courbes hyperelliptiques

Revêtement à 2 feuillets avec $(g = \frac{1}{2} B - 2 + 1)$

$$B = N \quad \text{pour } N \text{ pair} \quad (\Leftrightarrow) \quad N = 2g + 2$$

$$B = N + 1 \quad \text{pour } N \text{ impair} \quad (\Leftrightarrow) \quad N = 2g + 1$$

Donc pour un genre g donné la courbe s'écrit

$$\boxed{\mu^2 = P_{2g+1}(\lambda) \quad \text{ou} \quad \mu^2 = P_{2g+2}(\lambda)}$$

On passe du dernier cas au premier en envoyant un pt de branchement à l' ∞ par $\lambda \rightarrow 1/(\lambda - \lambda_0)$

Modules

(14)

La courbe hyperelliptique de genre g s'écrit
$$\mu^2 = P_{2g+1}(\lambda) \quad \Leftarrow \quad 2g+2 \text{ coeffs}$$

En normalisant μ, λ on se ramène à

$$\mu^2 = \lambda(\lambda-1) \prod_{k=2}^{2g-1} (\lambda - \lambda_k)$$

les λ_k sont les modules des courbes hyperelliptiques. Exemple dans le cas elliptique on peut se ramener à :

$$\mu^2 = \lambda(\lambda-1)(\lambda-t)$$

et il y a 1 module en genre 1.

En genre 2, on trouve de même 3 modules

Mais $(3g-3) = 3$ donc toutes les courbes de genre 2 sont hyperelliptiques. Dès le genre 3 il y a des courbes non hyperelliptiques,

typiquement la courbe $P_4(\lambda, \mu) = 0$ générique car $g = (N-1)(N-2)/2 = 3$. Ici on a $(3g-3) = 6$ et $(2g-1) = 5$.

Il y a donc une famille à 1 paramètre non hyperelliptique, exemple $\boxed{\lambda^4 + \mu^4 = 1}$

Regarder des exemples de courbes spectrales de systèmes intégrables. Tout le l'intérêt est dans la manière dont les modules sont répartis en variables non dynamiques et $\boxed{\text{variables d'action}}$

Cas général

Théorie de la déformation de Kodaira-Spencer. Victor Palamodov Tel Aviv

Problème inverse

15

■ La méthode algebro-geometrique consiste à reconstituer $L(\lambda)$ connaissant certaines données sur la courbe spectrale. Comme dans la théorie usuelle du problème inverse, ces données évoluent trivialement au cours du temps (sous $\dot{L} = [L, M]$) donc tout est dans la construction de ces données et la reconstruction de L .

■ Donnée naturelle : en chaque point

P de la courbe

$$\det(L(\lambda) - \mu) = 0$$

donc il existe un

espace propre en P

génériquement de dimension 1.

Autrement dit on peut résoudre

$$L(\lambda) \psi(\lambda, \mu) = \mu \psi(\lambda, \mu) \quad \psi \neq 0$$

ψ est donné par les formules de Cramer

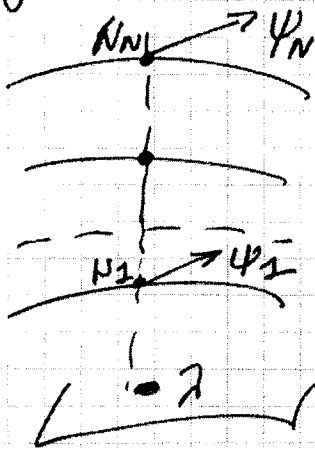
donc les composantes de ψ sont des fonctions rationnelles (ou plus généralement holomorphes - cas elliptique) de λ et μ .

Mais au voisinage de P , $(\lambda, \mu) = (\lambda(z), \mu(z))$

où z est un paramètre local (typiquement λ ou μ) (16)
 de z , et il en est de même partout

On a associé à $L(\lambda)$ un fibré analytique en droites sur la courbe spectrale.

Réciproquement ce fibré permet de reconstruire L à une symétrie triviale près. En effet au dessus de λ il y a N points $\mu_1 \dots \mu_N$, et on



peut choisir N vecteurs propres $\psi_1 \dots \psi_N$.

Formons la matrice $N \times N$

$$\hat{\psi} = (\psi_1 \dots \psi_N)$$

Alors

$$L(\lambda) = \hat{\psi} \hat{\mu} \hat{\psi}^{-1}$$

où $\hat{\mu} = \text{diag}(\mu_1 \dots \mu_N)$.

Cette quantité est invariante par permutation des feuillettes et est donc seulement fonction de λ .

L'ambiguïté est $\psi_k \rightarrow d_k \psi_k \quad d_k \neq 0$

Ceci veut dire $\hat{\psi} \Rightarrow \hat{\psi} \hat{D} \quad \hat{D} = \text{diag}(d_k)$

Comme $[\hat{D}, \hat{\mu}] = 0$ $L(\lambda)$ est invariant.

Points particuliers $I.e$ est essentiel

que tout ceci marche aux pts de branchement et singuliers

Pt. de Branchement

Autour de P , c'est μ qui est paramètre local.

ψ dépend analytiquement de μ et $\lambda = \mu^2(a + b\mu + \dots)$

En particulier en $\lambda = \lambda_0$
 $L(\lambda)$ "perd" une valeur

propre, perd un vecteur propre, et devient un bloc de Jordan.

$$\psi(\mu) = \psi_0 + \mu \psi'_0 + \dots$$

A λ fixe on a $\mu = \pm \sqrt{\lambda} + \dots$

$$\text{et donc } \psi_1 = \psi_0 - \sqrt{\lambda} \psi'_0 + \dots$$

$$\psi_2 = \psi_0 + \sqrt{\lambda} \psi'_0 + \dots$$

Choisissant une base adaptée $e_1 = \psi_0$
 $e_2 = \psi'_0$, $e_3 \dots e_N$ les autres vecteurs propres au dessus de λ_0 , à de petites corrections près:

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \mu & -\mu & \\ 0 & & I \end{pmatrix} \quad \hat{\psi}^{-1} = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ \mu & -1 & \\ 0 & & I \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \hat{\psi} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -\mu \\ * & \end{pmatrix} \hat{\psi}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ * & \end{pmatrix}$$

L échange $\mu \rightarrow -\mu$ échange les 2 premières colonnes de $\hat{\psi}$, les deux premiers diagonaux de $\hat{\psi}$, les 2 premières lignes de $\hat{\psi}^{-1} \Rightarrow$ ne change rien.
 Donc seules les puissances paires de μ interviennent
 $\Rightarrow L$ est bien fonction de λ .

Retour sur la matrice L de Neumann.

(18)

Courbe spectrale $\mu^2 + \sum \frac{F_k}{\lambda - a_k} = 0$

$$\Rightarrow \mu^2 + \frac{\prod_1^{N-1} (\lambda - b_j)}{\prod_1^N (\lambda - a_k)} = 0$$

$\mu \rightarrow \mu \prod (\lambda - a_k)$ donne

$$\mu^2 = - \prod_1^N (\lambda - a_k) \prod_1^{N-1} (\lambda - b_j)$$

variables non dynamiques

variables dynamiques

$$\Rightarrow \boxed{\text{genre} = N - 1}$$

car $2g + 1 = 2N - 1$

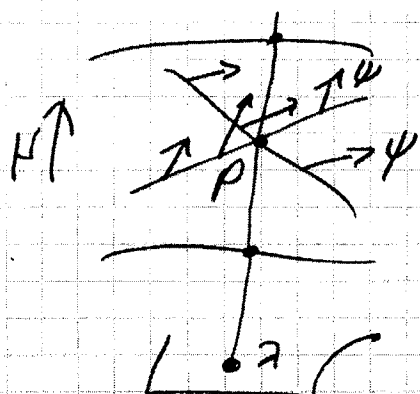
les valeurs $\lambda = a_k$ sont aussi des pts de branchement, donc L doit y dégenerer en bloc de Jordan.

Il est donc forcé que $L(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow a_k} g_k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g_k^{-1}$

c'est à dire L_k décrit l'orbite d'une matrice nilpotente.

Point singulier

Si on a deux branches



Sur chaque branche μ est une fonction définie de λ et on a un vecteur $\psi(\lambda)$ bien défini. En P, la matrice devient diagonalisable avec 2

vecteurs propres et donc $\propto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il n'y a donc **JAMAIS AUCUNE SINGULARITE de ψ**

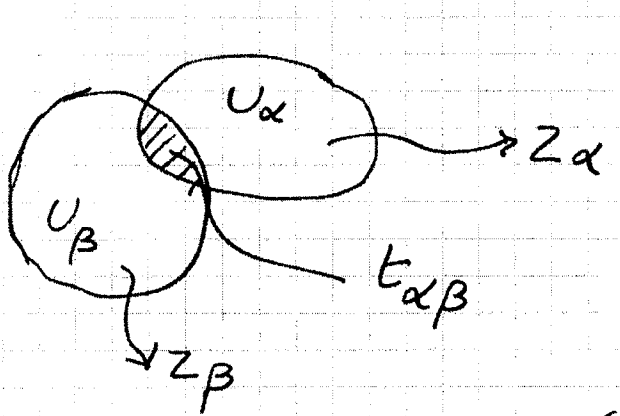
Ceci termine l'analyse du problème direct et inverse. A la matrice de Lax on peut associer un fibre' en lignes lisse sur la courbe spectrale, et reciproquement il permet de reconstruire L.

Un tel objet lisse est se'v'ement contraint par des considerations d'analyticite', ce qui permet de le construire tr'as explicitement. Mais il faut d'abord comprendre comment il evolue au cours du temps avec l'evolution de $L(t)$.

Fibrés en ligne sur une surface de Riemann.

Definition abstraite.

Localement isomorphe à $U_\alpha \times \mathbb{C}$



Plus g'neralement pour un fibre' vectoriel $\simeq U_\alpha \times \mathbb{C}^K$

Sur $U_\alpha \cap U_\beta$ on a

2 representations (z, V_α) et (z, V_β) pour le m'eme point, donc pour pr'server la structure vectorielle et analytique on demande $V_\alpha = t_{\alpha\beta}(z) V_\beta$ o'ù $t_{\alpha\beta}$ est une matrice $K \times K$ analytique inversible. Pour un fibre' en lignes, c'est simplement une

fonction analytique inversible, sans zéro ni pôle sur $U_\alpha \cap U_\beta$. (20)

Il y a une condition de cohérence sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$

$$V_\alpha = t_{\alpha\beta} V_\beta = t_{\alpha\beta} t_{\beta\gamma} V_\gamma = t_{\alpha\beta} t_{\beta\gamma} t_{\gamma\alpha} V_\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{t_{\alpha\beta} t_{\beta\gamma} t_{\gamma\alpha} = 1} \quad (*)$$

D'un autre côté, on peut remplacer V_α par $S_\alpha V_\alpha$ où $S_\alpha(z)$ est une matrice inversible holomorphe sur chaque U_α sans rien changer à qui remplace

$$\boxed{t_{\alpha\beta} \rightarrow S_\alpha^{-1} t_{\alpha\beta} S_\beta} \quad (**)$$

En particulier $t_{\alpha\beta} = S_\alpha^{-1} S_\beta$ satisfait (*)

et définit un fibré trivial.

Notion de section : $V(P)$ partout avec $V_\alpha(P) = t_{\alpha\beta}(P) V_\beta(P)$

Des solutions de (*) modulo (**)

sont par définition des objets dans une 1-cohomologie définie à la Čech.

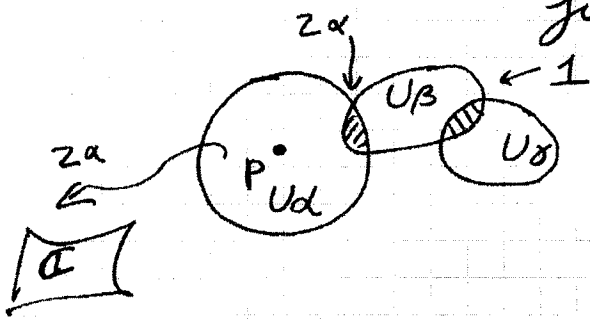
Structure "additive"

Si on a 2 fibrés en ligne définis par les fonctions de transition $t_{\alpha\beta}$ et $t'_{\alpha\beta}$, alors les produits $t_{\alpha\beta} t'_{\alpha\beta}$ satisfont (*)

et définissent un fibré en ligne que l'on appelle la Somme des deux fibrés en ligne car c'est une loi abélienne. Pour des

fibrés en lignes cette définition est invariante sous des redéfinitions (**).

Exemples : Fibrés ponctuels, fibre canonique



$$t_{\alpha\beta} = z_{\alpha} \text{ sur } U_{\alpha} \cap U_{\beta}$$

$$t_{\beta\gamma} = 1 \text{ autrement.}$$

Il existe donc une section représentée par z_{α} dans U_{α} et par 1 ailleurs et qui donc possède exactement un zéro en P .

Par addition on construit un fibré en lignes possédant une section s'annulant exactement n_1 fois en P_1 , n_2 fois en P_2 etc. On appelle degré $d(D) = \sum n_i$

$$\text{Diviseur } D = n_1 P_1 + \dots + n_k P_k$$

et donc il existe un fibré en lignes possédant une section de diviseur D .

Deux diviseurs sont équivalents s'ils diffèrent par le diviseur d'une fonction méromorphe.

Il revient au même de dire qu'ils correspondent au même fibré en lignes, et à la multiplication de la section par une fonction méromorphe. Un fibré en lignes ayant une section sans zéro ni pôle est trivial (prendre $t_{\alpha\beta} = s_{\alpha}/s_{\beta}$, pour la section s , alors $t_{\alpha\beta}$ est admissible et trivial).

La somme des fibrés correspond à celle des diviseurs

Le fibré canonique K correspond à $t_{\alpha\beta} = \frac{dz_{\alpha}}{dz_{\beta}}$
Ses sections sont les 1-formes.

La solution du problème de l'évolution

(22)

Intro

Si à $L(t) \leadsto \xi_t$ le fibré en lignes des vecteurs propres, alors

$$\xi_t = \xi_0 + t\chi$$

autrement dit, cette transformation linéarise le mouvement. Ici la somme et le produit par le scalaire t sont entendus au sens de la structure abélienne ci-dessus.

Fibré des vecteurs propres
et fibré en lignes

Connexion entre la définition "géométrique" du fibré en lignes et sa définition abstraite.

En chaque P de la courbe spectrale, on a un espace propre de dimension 1 E_P .

Soit $(e_1 \dots e_N)$ la base de l'espace ambiant

$$U_i = \{ P \mid V_i = (e_i \cdot V) \neq 0 \quad \forall V \in E_P, V \neq 0 \}$$

Sur $U_i \cap U_j$, pour le même vecteur V de E_P on a $V_i \neq 0$ et $V_j \neq 0$

V_i / V_j ne dépend pas de V et dépend analytiquement de $P \in U_i \cap U_j$.

On pose $t_{ij}(P) = (V_i / V_j)(P)$

qui satisfait évidemment (*) et définit un fibré en lignes abstrait.

La réciproque est moins évidente.

Une section méromorphe du fibre en lignes ci-dessus est obtenue en posant

$$\psi_1(P) = 1, \quad (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N) \in E_P$$

Par définition ψ n'a pas de zéro, ψ est régulier dans U_1 et possède des pôles là où $e_1 \cdot \psi = 0$.

Proposition ① ψ a $g + N - 1$ pôles

Preuve

$$W(\lambda) = (\det \hat{\psi}(\lambda))^2$$

$\hat{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ les ψ_k sont les vecteurs propres normalisés sur les feuillettes au dessus de λ . A cause du carré, W ne dépend pas de l'ordre des feuillettes $\Rightarrow$ est une fonction de λ . Elle a autant de zéros que de pôles.

Là où e un des ψ_k a un pôle, W a un pôle double. Et W s'annule aux points de branchement (deux colonnes deviennent égales)

En un tel pt. $\sqrt{W}$ s'annule α au paramètre local μ et donc W a un zéro simple en λ .

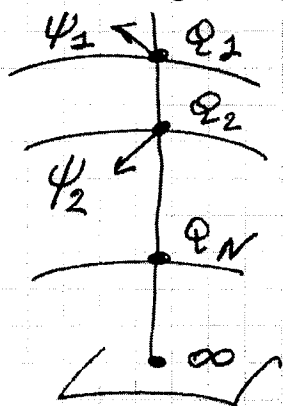
Donc, comme $g = \frac{1}{2} B - N + 1 \Rightarrow B = 2(g + N - 1)$ le nombre des pôles de ψ sur la surface de Riemann est $\frac{1}{2} B = g + N - 1$

② $N - 1$ pôles sont en fait fixés.

On suppose que $L(\lambda) \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{} D$ où D est une matrice diagonale avec ses éléments diagonaux tous différents. Ceci définit une normalisation de L et un choix de ∞ .

Alors la courbe spectrale a N feuilletés au dessus de ∞ , et les espaces propres correspondants sont $\propto (1, 0 \dots 0), (0, 1, 0 \dots 0) \dots (0 \dots 0, 1)$. Donc $\psi_2, \dots, \psi_N$ ont un pôle au dessus de ∞ . Ce sont les $(N-1)$ pôles fixes.

En outre, la fonction ψ a sa composante K qui s'annule en Q_1 pour $K = 2, \dots, N$ puisqu'elle devient ψ_1 , et sa composante K qui a un pôle en Q_K (car $(\psi_K)_K$ en a un).



Ici on fait appel à un théorème sur les surfaces de Riemann, le théorème de Riemann-Roch.

Il existe une unique fonction méromorphe (à constante près) ayant un pôle en Q_K , un zéro en Q_1 , et g pôles prescrits $P_1 \dots P_g$ ailleurs.

Ceci permet de construire la composante ψ_K de ψ pour $K = 2, \dots, N$ et donc de construire entièrement la section $\psi(P)$ du fibré E_P . On obtient donc une reconstruction géométrique du fibré en lignes E_P et donc de la matrice de Lax L , connaissant uniquement le diviseur de g points appelé DIVISEUR DYNAMIQUE

$$\mathcal{D}(t) = P_1(t) + \dots + P_g(t)$$

Etant donnée une surface de Riemann de genre g , on appelle Jacobienne le produit symétrisé de g copies de la surface.

Ceci veut dire que le point typique de la jacobienne est un ensemble de g points $(P_1, \dots, P_g)$ mais sans considération de l'ordre, c'est à dire un diviseur $P_1 + \dots + P_g$.

On le munit d'une structure complexe :

Si les P_k sont paramétrés par λ_k alors $J = P_1 + \dots + P_g$ est paramétré par les fonctions symétriques élémentaires des λ_k .

Ceci assure qu'il n'y a pas de problème quand P_j, P_k coïncident.

C'est aussi évidemment une variété compacte, car la surface de Riemann l'est.

Enfin il existe sur la Jacobienne une addition qui est une opération analytique et abélienne.

En effet, il revient au même de considérer J ou $\mathcal{D} = P_1 + \dots + P_g - g\infty$

$$\mathcal{D} + \mathcal{D}' = P_1 + \dots + P_g + P'_1 + \dots + P'_g - 2g\infty$$

Par Riemann-Roch il existe une fonction

méromorphe f qui a un pôle d'ordre g à ∞ , g autres pôles $P''_1 \dots P''_g$ et $2g$ zéros $P_1 \dots P_g P'_1 \dots P'_g$

Alors $\mathcal{D} + \mathcal{D}' \equiv P''_1 + \dots + P''_g - g\infty$, ce qui définit l'addition $J'' = J + J'$.

Un théorème connu et simple dit qu'une ⁽²⁶⁾
variété compacte munie d'une loi abélienne
est nécessairement un tore $\mathbb{C}^g / (\text{Péreau})$
muni de l'addition déduite de $\mathbb{C}^g$. Ainsi
la Jacobienne est un tel tore.

Linéarisation du flot sur la Jacobienne

Le résultat principal sur le sujet est que
le diviseur $D(t)$ que nous avons
défini correspondant à $L(t)$ subit un
mouvement linéaire uniforme sur la Jacobienne.

La démonstration la plus courte revient à utiliser
la définition abstraite de la somme de deux
fibrés en ligne, et utiliser la "solution"
formelle de $\dot{L} = [L, M]$ par une décomposition
de Riemann-Hilbert.

Structure à la Liouville

les variables d'action sont g paramètres
dans les coefficients de la courbe spectrale.
les variables d'angle sont définies sur
le tore qui est la Jacobienne. En fait
une section réelle sera un produit de g cercles
qui sont les tores de Liouville.