Résumé

Lax : $\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), M(\lambda)]$

Courbe spectrale : $\det(L(\lambda) - \mu I) = 0$

Exemple : Neumann

$$L(\lambda) = L_0 + \sum_k \frac{1}{\lambda - a_k} L_k \qquad L_k = \begin{pmatrix} x_k & 0 \\ p_k & x_k^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k & 0 \\ p_k & x_k^{-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

Courbe spectrale

$$\mu^2 + \sum \frac{F_k}{\lambda - a_k} = 0$$

F_k quantités conservées

Soit $\mu^2 + \dfrac{\prod_{j=1}^{N-1}(\lambda - b_j)}{\prod_{k=1}^{N}(\lambda - a_k)} = 0$ $\quad$ b_j quantités conservées équivalentes à F_k

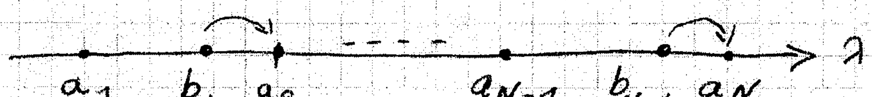
$$(\lambda, \mu) \longleftrightarrow \left(\lambda, \; i \prod_{k=1}^{N}(\lambda - a_k)\, \mu\right)$$

birationnel

g variables dynamiques

$$\boxed{\begin{array}{c} \mu^2 = \prod_{k=1}^{N}(\lambda - a_k) \prod_{j=1}^{N-1}(\lambda - b_j) \\ \Rightarrow \text{genre } g = N - 1 \end{array}}$$

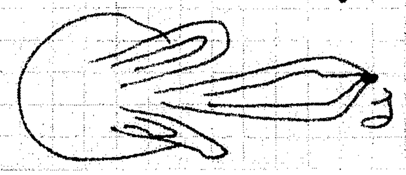
Pour $F_k > 0$



Dans la limite $b_j \to a_{j+1}$, il apparait une singularité

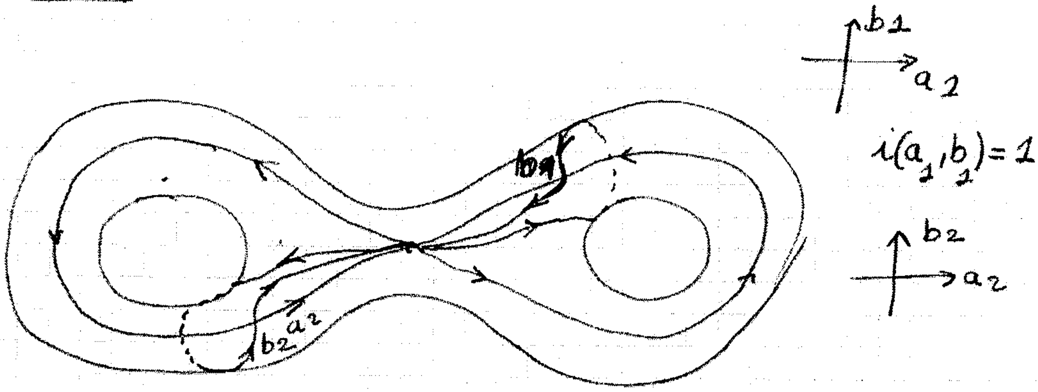
$$\mu^2 \propto (\lambda - a_{j+1})^2 \times c^{te}.$$

$\Rightarrow$ 2 branches



$g \to g - 1$

Formules



Sections du fibré canonique $\Longleftrightarrow$ Formes différentielles holomorphes globales

Base $\omega_1 \cdots \omega_g$, cet espace est de dimension g par Riemann-Roch. On peut choisir la base pour que

$$\boxed{\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}}$$

ce qui la fixe entièrement.
Alors les autres intégrales forment une matrice $g \times g$ appelée matrice des périodes

$$\boxed{B_{ij} = \oint_{b_i} \omega_j}$$

Ces quantités sont invariantes par déformation continue des a_i et b_j et dépendent analytiquement des modules de la surface de Riemann.

Relation Jacobienne $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{C}^g$ / (Réseau) et application d'Abel

On choisit une origine P_0 sur la surface de Riemann, pour tout P on calcule

$$\vec{Z} = \int_{P_0}^{P} \vec{\omega} \in \mathbb{C}^g \quad \vec{\omega} = (\omega_1, \cdots, \omega_g)$$

L'intégrale est prise sur un chemin allant de P_0 à P. Si on change de chemin en ajoutant $\sum (n_i a_i + m_i b_i)$

l'intégrale change en

$$Z_i \longrightarrow Z_i + n_i + \sum m_j B_{ji}$$

Elle est donc définie sur $\mathbb{C}^g$ / Réseau $= T^g$ où le réseau dans $\mathbb{C}^g \simeq \mathbb{R}^{2g}$ est défini par $\{ n_i + \sum m_j B_{ji} \mid n_i \in \mathbb{Z}^g \; m_i \in \mathbb{Z}^g \}$

Pour un $\boxed{\text{diviseur}}$ $P_1 + \cdots + P_g = \mathcal{D}$ définissant un pt de la Jacobienne, on forme

$$\boxed{\vec{\mathcal{A}}(\mathcal{D}) = \sum_{K=1}^{g} \int_{P_0}^{P_K} \vec{\omega} \in T^g}$$

qui est bien indépendant de l'ordre des P_K. C'est une application analytique entre deux tores complexes de dimension g, localement bijective. Les Théorèmes d'Abel et Jacobi disent que ~~exact~~ ces deux tores sont en fait isomorphes sous cette application. En particulier

$P_1 + \cdots + P_g$ est équivalent à $P'_1 + \cdots + P'_g$
$\Longleftrightarrow$ il existe des chemins $\gamma_k : P_k \rightsquigarrow P'_k$
tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{g} \int_{P_k}^{P'_k} \vec{\omega} = 0$ (Abel).
et pour tout point de $\mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + B\mathbb{Z}^g)$
on peut trouver $P_1 \cdots P_g$ tels que
$\mathcal{A}(P_1 + \cdots + P_g)$ soit ce point (Jacobi)

Fonctions Theta

On peut voir que $\operatorname{Im} B > 0$.
On peut donc définir une fonction θ multidimensionnelle par la série convergente

$$\boxed{\theta(z_1 \cdots z_g) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{2i\pi(m,z) + i\pi(Bm,m)}}$$

La propriété essentielle est que

$$\begin{cases} \theta(z + e) = \theta(z) & e \in \mathbb{Z}^g \\ \theta(z + Be) = \underbrace{e^{-i\pi(Be,e) - 2i\pi(e,z)}}_{\text{multiplicateur}} \theta(z) \end{cases}$$

Ainsi $\theta(z)$ est une section d'un certain fibré (défini par les multiplicateurs) sur le tore T^g, c'est à dire la Jacobienne.

Le Théorème de Riemann

On peut plonger la surface de Riemann dans sa Jacobienne en envoyant tout

point P sur $\mathcal{A}(P) = \int_{P_0}^{P} \vec{\omega}$
Ceci définit une bijection analytique sur une courbe compacte dans T^g. D'autre part on a une surface de codimension 1 définie par $\theta(z) = 0$ dans T^g (noter que ceci est invariant par les multiplicateurs). Le théorème dit comment la courbe coupe la surface dans T^g.

Théorème Si $w = (w_1 \dots w_g)$ arbitraire

- soit $\theta(\mathcal{A}(P) - w) \equiv 0$ s'annule identiquement (la courbe est incluse dans le diviseur de la fonction θ)
- soit la courbe coupe le diviseur de la fonction θ en exactement g points $P_1 \dots P_g$, et il existe une constante K telle que

$$\mathcal{A}(P_1) + \dots + \mathcal{A}(P_g) = w - K$$

(K ne dépendant pas de w).

Application Fonction de Baker - Akhiezer

$$\boxed{\psi = e^{\int_{P_0}^{P} \mathcal{B}^{(s)}} \frac{\theta(\mathcal{A}(P) + U^{(s)} - \zeta)}{\theta(\mathcal{A}(P) - \zeta)}}$$

$$\int_{a_i} \mathcal{B}^{(s)} = 0 \qquad \oint_{b_i} \mathcal{B}^{(s)} = 2i\pi\, U_i^{(s)}$$

$\theta(\mathcal{A}(P) - \zeta)$ s'annule exactement sur $\mathcal{D} = \sum_1^g P_K$ donné, $\mathcal{B}^{(s)}$ est une forme singulière en des points Q_j donnés, proportionnellement à des temps t_j.