

Sofian Tekou

GDR condmat
(LPTHE)

Lundi 6/12/2007

Fermions 1D & modèles de Calogero-Sutherland

L'objectif général est de présenter quelques problèmes contemporains de matière condensée (thématique : fermions fortement corrélés au-delà du modèle de Tomonaga-Luttinger) et de montrer qu'il est possible de les résoudre, dans certains cas simples au moins, au moyen d'un modèle de Calogero-Sutherland.

Plan de l'exposé :

① Introduction

- I-A. liquide de Fermi (propriétés spectrales et plasmons en $D > 1$)
- I-B. Non-liquide de Fermi (" " en $D = 1$)
- I-C. Au-delà de Tomonaga-Luttinger (interaction + courbure en $D = 1$)

② Fermions 1D sans spin & modèle de Calogero-Sutherland (CS)

- II-A. Brève présentation du modèle de CS
- II-B. Modèle CS et plasmons 1D
- II-C. Comparaison avec d'autres approches - Perspectives

③ Fermions 1D avec spin (couplage spin-charge)

- III-A. Approche par l'Ansatz de Bethe de N. Andrei
- III-B. Approche par théorie des champs de Brazovskii & al.
- III-C. Perspectives ("Spin" Calogero-Sutherland ?)

④ Conclusions

① Introduction

②

I-A - liquide de Fermi

En dimension 3 d'espace la théorie décrivant des électrons en interaction est la théorie du liquide de Fermi de London (1956), voir D. Pines et P. Nozières, "The theory of Quantum liquids", vol. 1 (1989).

Cette théorie démontre que la physique de basse énergie d'un ensemble d'électrons en interaction (forte mais non-attractrice) est équivalente à une théorie de couplage faible entre des quasi-particules fermioniques (les électrons de départ possèdent une charge et un spin et habillés par des excitations de type particule-trou).

Dans la suite on partira du Hamiltonien de "basse énergie" :

$$H = \sum_{k, \sigma} \sum_{\alpha} \Psi_{k\sigma}^{\dagger} \Psi_{k\sigma} + \sum_q U_q n_q n_{-q},$$

où ξ_k est le spectre à une particule, $\Psi_{k\sigma}^{\dagger}$ et $\Psi_{k\sigma}$ opérateurs fermioniques, U_q potentiel d'interaction et $n_q = \sum_{k\sigma} \Psi_{k+q, \sigma}^{\dagger} \Psi_{k\sigma}$.

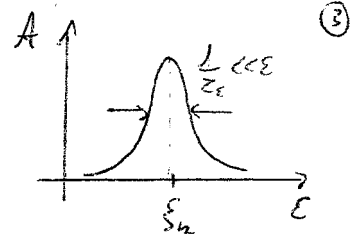
Propriétés spectrales : regardons rapidement, dans un premier temps, les propriétés à 1-corps du liquide de Fermi (LF). la fonction de Green habillée est donnée par :

$$G^*(\varepsilon, k) = \frac{1}{i\varepsilon - \xi_k - \Sigma(\varepsilon, k)} \quad \text{où : } -\text{Im} \Sigma^R(\varepsilon = \xi_k) = \frac{1}{2\tau_{\varepsilon}} \propto r_s^2 \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_F}$$

$r_s = \frac{a_0}{a_B}$ est le paramètre d'interaction et τ_{ε} le tps de vie des quasi-particules. Au voisinage de la surface de Fermi ($\varepsilon \ll \varepsilon_F$) le tps de vie est grand et les quasi-particules fermioniques sont bien définies : $\frac{1}{\tau_{\varepsilon}} \ll \varepsilon$.

la fonction spectrale est une lorentzienne:

$$A(\varepsilon, k) = -\text{Im } G^R(\varepsilon, k) \simeq \frac{1/2\tau\varepsilon}{(\varepsilon - \varepsilon_n)^2 + 1/4\tau^2\varepsilon^2}$$



les quasi-particules et quasi-trous proches de la surface de Fermi sont de bonnes excitations élémentaires (charge $\pm e$, spin $\frac{1}{2}$).

Excitations collectives (plasmons 3D)

Par définition, les plasmons sont les quantas des oscillations de la densité électronique. Ils sont bien étudiés en $D=3$, cf. théorie et expérience (perte d'énergie d'électron) dans l'ouvrage de Pines & Nozières.

Spectre des excitations particule-trou:

$$[\omega(q) = \varepsilon_{n+q} - \varepsilon_n]$$

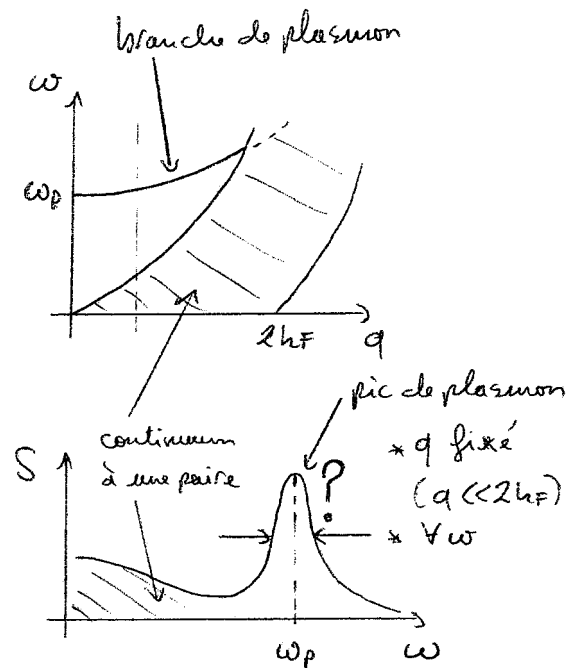
$$\omega_p(q) = \omega_p \left[1 + \frac{3}{10} \left(\frac{v_F q}{\omega_p} \right)^2 + \dots \right]$$

$$\text{fréquence plasma: } \omega_p \simeq \left(\frac{4\pi e^2 \rho_0}{m} \right)^{1/2}$$

Facteur de structure dynamique:

$$S(q, \omega) = -\text{Im} \langle |\rho(\omega, q)|^2 \rangle$$

ρ : densité d'électron



Question: effet des interactions sur la largeur du pic de plasmon dans le régime $q \rightarrow 0$ ($q \ll 2k_F$), $\forall \omega$?

J. Duhois & Kivclson, Phys. Rev. 186 409 (1969)

"Electron correlation effects on plasmon damping and UV absorption in metals".

$\Rightarrow$ effet des interactions / atténuation des plasmons est au-delà de la RPA

RPA basée sur l'évaluation de la boucle fermionique

(4)

$$\text{Diagram} = \Pi^{(0)}(i\omega, q) = \frac{1}{\beta} \sum_{i\varepsilon} \int \frac{d^3\vec{l}}{(2\pi)^3} G^{(0)}(i\varepsilon, \vec{l}) G^{(0)}(i(\omega - \varepsilon), \vec{q} - \vec{l})$$

$$G^{(0)}(i\varepsilon, \vec{l}) = \frac{1}{i\varepsilon - \xi_{\vec{l}}}$$

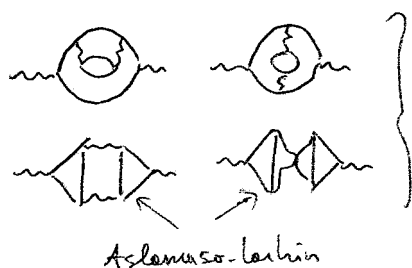
Permet d'accéder au continuum à 1 paire (el-trou): $S^{(0)}(\omega, q) = -\text{Im} \Pi^{(0)}(\omega, q)$.

Duhois & Kivelson: continuum à 2-paires

d. technique de som. des amplitudes

$$\left| \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \right|^2 = \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \dots$$

Remarque: Duhois & Kivelson ont correctement tenu compte des diagrammes du type Aslamasov-Larkin ou Altshuler-Shklovskii ...

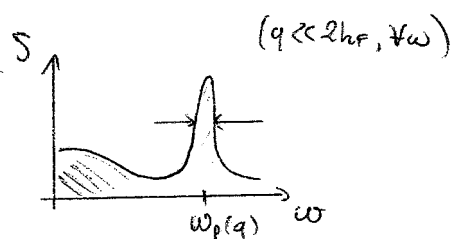
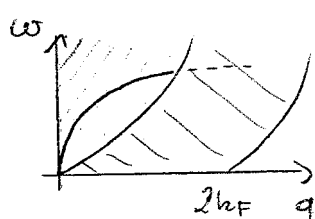


$\Rightarrow$ largeur du pic

$$\chi_q \propto Cte q^2$$

où la Cte théorique est inf. à la valeur expérimentale (d.d.)
Atténuation sup. due au désordre ...

Remarque 2: plasmons 2D



En suivant Duhois & Kivelson voir:

Mishchenko, Reizer et Glazman
PRB 69 195302 (2004)

Dans la continuité: propriétés spectrales et
facteur de structure dynamique
de fermions en interaction en $D=1$?

I-B. Non-liquide de Fermi (fermions en interaction en D=1)

(5)

Pour décrire des fermions (électrons sans spin) en dimension 1 d'espace on peut commencer par considérer le modèle de Hubbard 1D:

$$H = -t \sum_i [c_{i+1}^\dagger c_i + c_i^\dagger c_{i+1}] + U \sum_i n_i n_{i+1} - N \sum_i \mu_i,$$

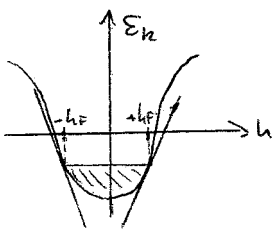
où t est l'amplitude de saut sur le réseau et U l'interaction entre sites voisins.

Remarque: par Jordan-Wigner: fermions sans spin = chaînes de spin XXZ

$$H = \sum_i J_{xy} [S_{i+1}^x S_i^x + S_{i+1}^y S_i^y] + J_z S_{i+1}^z S_i^z - h_z S_i^z$$

$$J_{xy} \longleftrightarrow t; \quad J_z \longleftrightarrow U; \quad h_z \longleftrightarrow N.$$

On considère ensuite la limite de basse énergie du modèle de Hubbard 1D: en particulier le cas d'un métal 1D (sous $1/2$ remplissage) avec des interactions répulsives ($U > 0$). On a alors un liquide de fermions sans gap.



On passe à la limite continue: $\Psi(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{c_i}{\sqrt{a}}$

et on décompose le champ de fermion Ψ en composantes chirales:

$$\Psi(x) \simeq \Psi_+(x) e^{-i k_F x} + \Psi_-(x) e^{+i k_F x} \text{ au voisinage de } \pm k_F.$$

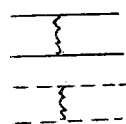
En ne conservant que les termes correspondant à un spectre linéaire on arrive alors au modèle de Tomonaga-Luttinger:

$$H = H_0 + H_I$$

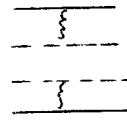
$$H_0 = \int dx [\Psi_+^\dagger(x) i v \partial_x \Psi_+(x) - \Psi_-^\dagger(x) i v \partial_x \Psi_-(x)]$$

$$H_I = U a \int dx [\rho_+(x)^2 + \rho_-(x)^2 + 2\rho_+(x)\rho_-(x)]$$

processus ϕ_4



processus ϕ_2



limite de basse énergie du modèle de Hubbard 1D.

— : fermion droit ($+k_F$)

--- : fermion gauche ($-k_F$)

$\rho_{i=\pm}$: densité de fermion { droit (+)
gauche (-)

le modèle de Tomonaga-Luttinger (liquide sans gap de fermions en interaction en dimension 1 d'espace) peut être résolu exactement.

* technique fermionique: la RPA est exacte (Dzyaloshinski et Larkin
Sov. Phys JETP 38 202 (1974))

$$\text{bubble} \equiv \text{loop} + \text{loop-loop} + \dots = \Pi(i\omega, q)$$

$$S(\omega, q) = -\text{Im} \Pi^R(\omega, q).$$

* technique bosonique: bosons (paires particule-trou) libres
excitations élémentaires exactes de TL.

cf. F. Bloch ZS. Phys. 81 363 (1933)

S. I. Tomonaga, Prog. Th. Phys. 5 544 (1950)

$$\Psi_{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm i\sqrt{4\pi}\phi(x)} \Rightarrow H = \frac{v}{2} \left[K \Pi^2(x) + \frac{1}{K} (\partial_x \phi(x))^2 \right]$$

Hamiltonien d'une corde élastique : - $\phi(x)$: champ de déplacement de la corde
- $\phi(x)$: coordonnée collective pour les fermions

cf. densité de fermion $\rho(x) = -\frac{1}{\pi} \partial_x \phi(x)$

Propriétés spectrales du modèle de TL:

La fonction de Green à 1 particule possède une bande de coupure

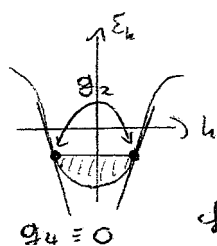
$$G_{\pm}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ix \pm u z} \left(\frac{x^2}{(x+i(uz+d))(x-i(uz+d))} \right)^{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{K+K^{-1}}{2} - 1 \quad (\lambda = 0 \text{ pour des fermions libres ; } K=1)$$

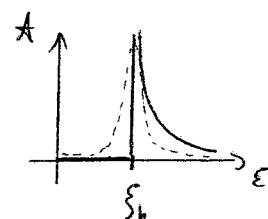
Remarque: DOS: $\rho(\epsilon) \sim \epsilon^{\lambda}$; $n(k) \sim |k|^{\lambda}$

Fonction spectrale non lorentzienne: en théorie de perturbation

$$G(i\epsilon, h) = \frac{1}{i\epsilon - \xi_h - \Sigma(i\epsilon, \xi_h)} \quad \text{et} \quad -\text{Im} \Sigma^R(\epsilon, \xi_h) \propto g_z^2 (\epsilon - \xi_h) \Theta(\epsilon - \xi_h)$$



$$\text{Donc: } A(\epsilon, h) = -\text{Im} G^R(\epsilon, h) \propto g_z^2 \frac{\Theta(\epsilon - \xi_h)}{\epsilon - \xi_h}$$



cf. $\square = \sum_{k+} \Rightarrow -\text{Im} \sum_{k+} \frac{1}{\omega} \delta(\epsilon - \xi_h)$: catastrophe infrarouge (conservat° d'énergie $\equiv$ conservat° du moment)

Remarque: divergence logarithmique dans la partie réelle

(7)

Au second ordre: $-\text{Im} \Sigma^R(\epsilon, \xi_n) = g_z^2 \text{Im} \left[(\epsilon - \xi_n + i0) \log(\epsilon - \xi_n + i0) \right]$

↳ divergences dans la série de perturbation en $D=1$.

↳ somme des log dominants (méthode "parquet")

$$A(\epsilon, h) \propto (\epsilon + \xi_n)^\lambda (\epsilon - \xi_n)^{\lambda-1} \odot (\epsilon - \xi_n) \Rightarrow \text{divergence en loi de puissance non-universelle.}$$

|| Ces résultats sont exacts pour le modèle de TL

|| Ces résultats sont non-perturbatifs / interactions

|| Ils traduisent l'absence de quasi-particules fermioniques
(non-liquide de Fermi)

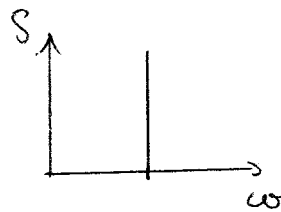
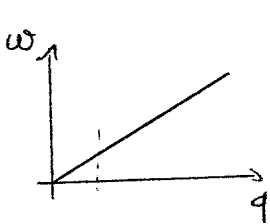
Remarque 2: pour des fermions avec spin $\frac{1}{2}$ la fonction spectrale présente deux pics avec diverg. en loi de puissance:

- pic de charge ($u_c q$) $\Rightarrow$ séparation spin-charge (exacte pour TL)
- pic de spin ($u_s q$)

$$\Rightarrow G(x, t) = \frac{1}{x-t} = \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{2}} (x-t)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\text{interaction}} \frac{1}{(x-u_c t)^{\frac{1}{2}} (x-u_s t)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\gamma_c = \frac{\kappa_c + \kappa_c^{-1}}{4} ; \gamma_s = \frac{\kappa_s + \kappa_s^{-1}}{4}$$

voir (III).

Plasmons du modèle de TL: $S(\omega, q) = K |q| \delta(\omega - v |q|)$



- Plasmon libre

- la paire particule-trou (boson) est un ~~état~~ état propre.

le spectre relativiste est une approximation de basse énergie. Si l'on reconsidère le modèle de Hubbard 1D, ce dernier possède un spectre de bande :

$$\varepsilon(k) = -2t \cos(ka) \text{ soit :}$$

$$\xi(k) = \varepsilon(k) - \varepsilon_F \approx v(|k| - k_F) + \frac{1}{2m} (|k| - k_F)^2 + \frac{\hbar^2}{6} (|k| - k_F)^3 + \dots$$

$$v = 2ta \sin(k_F a) ;$$

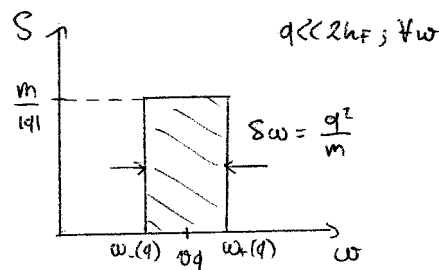
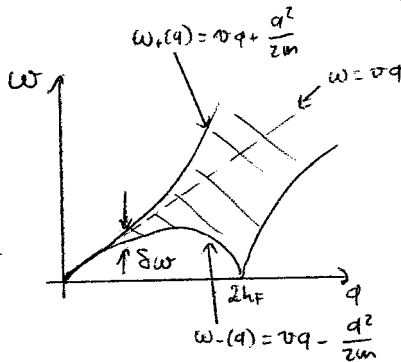
$$m = 2ta^2 \cos(k_F a) ; \quad \hbar^2 = -2ta^3 \sin(k_F a)$$

termes de structure de bande ; non pertinents au sens du groupe de renormalisation

l'un des premiers auteurs à prendre en compte les termes non-linéaires provenant de la structure de bande est Michael Schlitz Phys. Rev. 166 404 (1968).
Corrections aux grandeurs thermodynamiques. MS remarque la pertinence de ces termes / problème de l'atténuation des plasmons 1D ... cf. rev. à Felix Bloch en fin d'article ...

Cas des fermions libres :

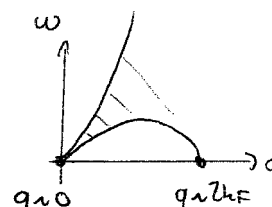
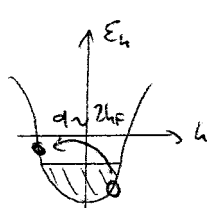
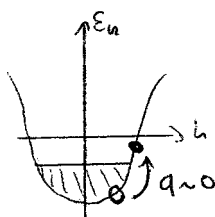
$$\chi''_{\text{Or}} \equiv \Pi^{(2)}(i\omega, q) = \frac{m}{2\pi |q|} \log \left[\frac{(i\omega)^2 - \omega_-^2(q)}{(i\omega)^2 - \omega_+^2(q)} \right]$$



Profil non-lorentzien
⇒ résultat qui n'est pas accessible par une théorie de perturbation en $1/m$.

Remarque : en D=1 : contraintes liées à la conservation de l'énergie et du moment

Pas de poids spectral pour $|\omega| < \omega_-(q)$



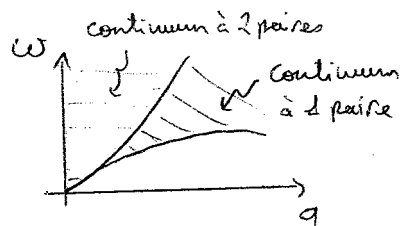
Objectif : tenir compte des interactions

$\left\{ \begin{array}{l} \delta\omega = ? \\ \text{profil de } S(\omega, q) ? \end{array} \right.$

Contraintes:

(9)

- la RPA n'est plus exacte:



à la Pekar et Kivelson en dimension 1
cf. continuum à 2-paires.

Théorie de perturbation en $\frac{1}{m}$ est valable pour: $|\omega| \gg v|q|$
↳ elle explose lorsque $\omega \rightarrow v|q|$.

- théorie des champs non-linéaire:

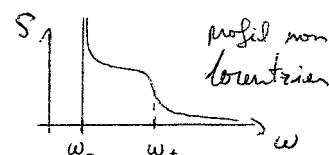
$$H = \frac{v}{2} \left[K \pi^2(x) + \frac{1}{K} (\partial_x \phi(x))^2 \right] - \frac{\sqrt{\pi}}{6m} \left[3 \partial_x \phi(x) \pi^2(x) + (\partial_x \phi(x))^3 \right]$$

Non-perturbatif par rapport aux interactions - Divergences $\omega \rightarrow v|q|$.

Approches alternatives

- Khodas et al. PRL 96 196405 (2006) - singularité X

- Pereira et al. PRL 96 257202 (2006) { Ansatz de Bethe
(avec Affleck, JHM...) { Numérique (DMRG)



Dans la partie II: approche au moyen
de la solution du modèle de
Calogero - Sutherland
cf. M. Pustilnik PRL 97 036404 (2006)

Remarque: En suivant Pustilnik, Mishchenko, Glazman et Andreu PRL 94 126805 (2003)

Expérience de transconductance par entraînement coulombien

$(I_2 = 0)$ $R_{12} = \frac{dV_2}{dI_2}$ Résistance croisée due aux interactions & à la cohérence

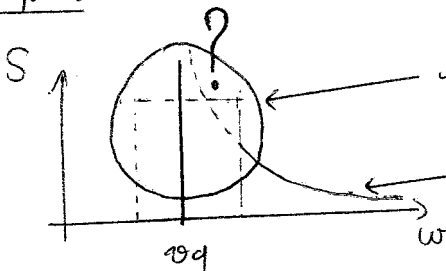
$R_{12}(T) \propto U_{12}^2 \int dq d\omega \frac{q^2}{n_1 n_2 T} \frac{S_1(\omega, q) S_2(\omega, q)}{\sinh^2(\frac{\omega}{2T})} \Rightarrow$ recouvrement de S_1 et S_2 pour des fils différents $v_1 \neq 0$

$R_{12} \sim \frac{T^2}{m}$ $T \gg k_F \delta \omega$

$R_{12} \sim \frac{T^5}{m^4}$ $T \ll k_F \delta \omega$ (cont. 2-paires)

(II) Fermions 1D sans spin et modèle de Calogero-Sutherland (CS) (10)

Référence principale: M. Pustilnik PRL 97 036404 (2006)

Problème: 

II - A. Breve introduction au modèle de Calogero-Sutherland

Ref. (non trouvée): Bill Sutherland "Beautiful Models" (World Scientific, 2004))

L'Hamiltonien de Calogero-Sutherland (CS) décrivant N particules en interaction sur un cercle de périmètre L s'écrit:

$$H = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i < j} V(x_i - x_j)$$

$$\text{où: } V(x) = \frac{\lambda(\lambda-1)}{m \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)} \underset{L \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda(\lambda-1)}{m x^2} \propto \frac{1}{x^2},$$

avec m : masse de bande et λ la constante d'interaction ($\lambda > 1$ pour des interactions répulsives).

Une particularité de ce modèle est que le terme d'interaction en $1/x^2$ possède une nature statistique. En effet, la fonction d'onde:

* de l'état fondamental: $\Psi_0(x_1, \dots, x_N) \propto \prod_{i < j} (x_j - x_i)^\lambda = \Delta^\lambda(x_1, \dots, x_N)$

* des états excités: $\Psi(x_1, \dots, x_N) \propto \Delta^\lambda(x_1, \dots, x_N) J(x_1, \dots, x_N)$

où $J(x)$ est un polynôme de Jack (sym).

Pour $\lambda=0$: bosons tandis que pour $\lambda=1$: fermions.

Bien que particulier ce modèle possède les ingrédients de base dont nous avons besoin: *

* interactions (répulsives $\lambda > 1$)

* courbure de bande.

Le plus le facteur de structure dynamique du modèle de CS a été déterminé exactement par Z.N.C. Ha PRL 73 1574 (1994). (14)

II-B - Modèle de CS et plasmons 1D

En suivant l'utilité nous allons maintenant analyser la solution de Ha pour déterminer le facteur de structure dynamique dans la limite $q \rightarrow 0$ ($q \ll 2k_F$), $\forall \omega$ du modèle de CS.

Dans le modèle de CS les excitations correspondent à :

- * des quasi-particules de masse m et vitesse $|v| > u$
- * des quasi-trous de masse $\bar{m} = \frac{m}{\lambda}$ et vitesse $|\bar{v}| < u$

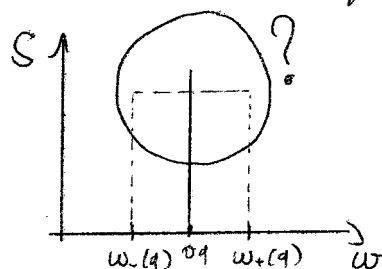
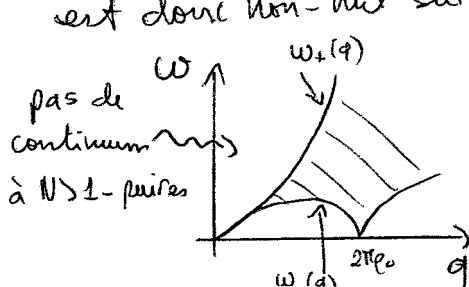
où $u = \frac{\pi \lambda e}{m}$ est la vitesse plasma et $e = \frac{N}{L}$ la densité.

Notons que l'énergie et le moment (1 fondamental) d'un état excité sont donnés par :

$$\begin{cases} P = \sum_i m v_i - \sum_j \bar{m} \bar{v}_j \\ E = \sum_i \frac{1}{2} m (v_i^2 - u^2) - \sum_j \frac{1}{2} \bar{m} (\bar{v}_j^2 - u^2) \end{cases}$$

Une propriété remarquable du modèle de CS est que l'application de l'opérateur densité : $\rho_a^+ = \int_0^L dx e^{iqx} \rho(x)$; $\rho(x) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N \delta(x-x_i) - \rho_0$ sur le vide $|0\rangle$: $\rho_a^+ |0\rangle$ donne un état propre où les vitesses des quasi-particules pointent toutes dans la même direction !

On a donc des fermions chiraux, i.e. dans le langage de la g-ologie le processus $\phi_2 \equiv 0$. Il n'existe donc pas de continuum à 2-paires (ou N-paires, $N > 1$). Le facteur de structure dynamique est donc non-nul sur un support borné $\omega \in [\omega_-, \omega_+]$.



Etant donné cette chiralité le modèle sera résolu pour des valeurs particulières de λ , telle que : $\lambda = \frac{r}{s}$ où r et s sont premiers entre eux (leur plus grand commun diviseur est 1 ou -1). Pour un tel λ , l'état $|R\rangle = e^{-i} |0\rangle$ possède exactement : $\begin{cases} s \text{ fermions droits} \\ r \text{ quasi-trous} \end{cases}$

et la masse inertielle est conservée : $\bar{m} = \frac{m}{\lambda} = \frac{s}{r} m \Rightarrow r\bar{m} = sm$.

Sur la base de ces considérations les bornes $\omega_{\pm}(q)$ sont obtenues au moyen des lois de conservation de l'énergie et du moment associés à $|R\rangle$: $q = P_{|R\rangle}$; $\omega = E_{|R\rangle}$:

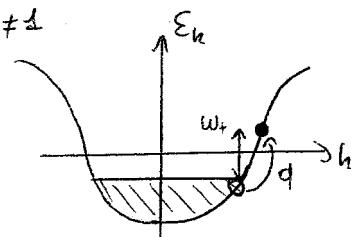
$$\begin{cases} q = \sum_{i=1}^s m(v_i - u) + \sum_{j=1}^r \bar{m}(u - \bar{v}_j) & (q) \\ 2(\omega - uq) = \sum_{i=1}^s m(v_i - u)^2 - \sum_{j=1}^r \bar{m}(u - \bar{v}_j)^2 & (\omega) \end{cases}$$

Borne ω_+ : Supposons $\bar{v}_j \approx u \quad \forall j$ et $v_i \approx u \quad \forall i \neq 1$

A partir de (q) on a donc : $v_1 \approx u + \frac{q}{m}$.

De (w) on en déduit : $\omega_+(q) = uq + \frac{q^2}{m}$

A $\omega_+(q)$ le trou est juste en-dessous de l'énergie de Fermi.

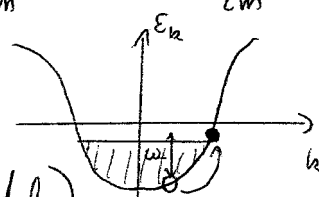


Borne ω_- : Supposons $v_i \approx u \quad \forall i$ et $\bar{v}_j \approx u \quad \forall j \neq 1$

A partir de (q) on a : $\bar{v}_1 \approx u - \frac{q}{\bar{m}}$

A partir de (w) on en déduit : $\omega_-(q) = uq - \frac{q^2}{2\bar{m}} = uq - \lambda \frac{q^2}{2m}$

La borne ω_- correspond à la présence d'une particule juste au-dessus de l'énergie de Fermi (et donc un trou au fond de la mer de Fermi - X-ray edge problem)



On en déduit :

$$\boxed{\Delta\omega = |\omega_+ - \omega_-| = (1 + \lambda) \frac{q^2}{2m}}$$

La largeur du pic de plasmon (plus large pour $\lambda \gg 1$ - $m^* \equiv \frac{2}{1+\lambda} m$)

Nous pouvons maintenant évaluer le facteur de structure dynamique (FSD) du modèle de CS. Dans la limite thermodynamique ($N \rightarrow +\infty$; $\rho_0 = \text{cte}$) on a: (13)

$$S(\omega, q) = q^2 \int \prod_{i,j} dv_i d\bar{v}_j F_{S,r} \delta(q - P_{R,r}) \delta(\omega - E_{R,r}) \quad (5)$$

où le facteur de forme (conjecture de Haldane - démonstration par Ha) est donné par:

$$F_{S,r} \propto \frac{\prod_{i,j} |v_i - v_j|^\lambda \prod_{\bar{i},\bar{j}} |\bar{v}_{\bar{i}} - \bar{v}_{\bar{j}}|^{2\lambda}}{\prod_{i,\bar{i}} (v_i - \bar{v}_{\bar{i}})^2 \prod_i (v_i^2 - u^2)^{1-\lambda} \prod_{\bar{j}} (u^2 - \bar{v}_{\bar{j}}^2)^{1-\frac{1}{\lambda}}} \quad \left(\text{à des facteurs numériques} \right).$$

En suivant Rustikhin, ce facteur de forme peut être simplifié dans certaines limites pour permettre l'évaluation exacte de (5).

En particulier: $\begin{cases} u < v_i < v_0 \\ \bar{v}_0 < \bar{v}_{\bar{j}} < u \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} v_0 = u + \frac{q}{m} \\ \bar{v}_0 = u - \frac{q}{m} \end{cases}$

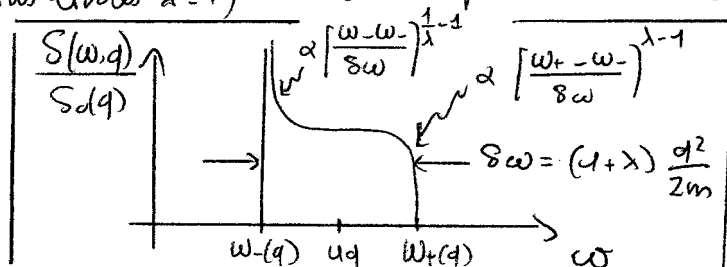
Dans la limite $q \rightarrow 0$ ($q \ll 2k_F$): $\begin{cases} v_i^2 - u^2 \approx 2u(v_i - u) \\ u^2 - \bar{v}_{\bar{j}}^2 \approx 2u(u - \bar{v}_{\bar{j}}) \end{cases} \quad \text{etc...}$

De plus: $\begin{aligned} \omega \approx \omega_+ \quad v_i \approx v_0 \quad \text{et} \quad v_{i+1} \approx \bar{v}_{\bar{j}} \approx u \\ \omega \approx \omega_- \quad \bar{v}_i \approx \bar{v}_0 \quad \text{et} \quad \bar{v}_{\bar{j}+1} \approx v_i \approx u \end{aligned} \quad \text{etc...}$

D'où: $\begin{cases} \frac{S(q, \omega)}{S_0(q)} \propto \left[\frac{\omega - \omega_-(q)}{\delta\omega} \right]^{\frac{1}{\lambda}-1} & ; \quad 0 < \omega - \omega_- < \delta\omega \\ \frac{S(q, \omega)}{S_0(q)} \propto \left[\frac{\omega_+(q) - \omega}{\delta\omega} \right]^{\lambda-1} & ; \quad 0 < \omega_+ - \omega < \delta\omega \end{cases}$

où $S_0(q) = \frac{m}{q}$ (cf. fermions libres $\lambda=1$) $\hookrightarrow$ lois de puissance non-universelles.

cf. dualité de CS:
 $\begin{cases} \text{particule} \leftrightarrow \text{trou} \\ \lambda \leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \end{cases}$
 $(|\omega - \omega_-| \leftrightarrow |\omega - \omega_+|)$
 $(\lambda \leftrightarrow \frac{1}{\lambda})$



Profil non-
lorentzien

II.C. Comparaison avec d'autres approches - Perspectives

* les résultats sur $S(\omega)$ sont en accord avec les résultats obtenus par I. Affleck, S.M. Maillot et al... (th. des champs, Ansatz de Bethe...).

la loi en q^2 semble donc être universelle ! i.e. robuste à une infinité d'opérateurs non-pertinents négligés par CS mais pris en compte dans Hubbard ID ...

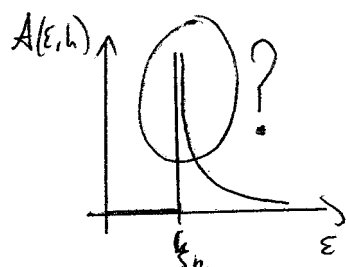
* les résultats sur le profil sont en accord avec une analyse plus phénoménologique due à Rhodes, Pustilnik, Kanev et Blaizman.

* les résultats sur le profil sont en accord (qualitatif) avec les simulations numériques du type DMRG (Affleck, SHM, White et al...)

Remarque: Si $g_2 = 0$ pour CS cela implique que g_4 est responsable de l'effet des interactions (λ). Catastrophe IR en ω ?

Perspectives

* Propriétés spectrales : effet des interactions et de la courbure de bande



fermions chiraux : $g_2 = 0$... $\triangle$

Si $\lambda \leftrightarrow g_4$: simple renormalisation de v_F à prévoir...

* FSD pour $q \simeq 2k_F$: on a
$$\begin{cases} \Psi(x) \simeq \Psi_+(x)e^{-i k_F x} + \Psi_-(x)e^{+i k_F x} \\ \Psi_{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} : \exp[\pm i \sqrt{4\pi} \Phi(x)] : \end{cases}$$

$$\Psi_+^\dagger(x)\Psi_+(x) = \underbrace{\Psi_+^\dagger(x)\Psi_+(x) + \Psi_-^\dagger(x)\Psi_-(x)}_{\text{densité à } q \simeq 0} + \underbrace{\Psi_+^\dagger(x)\Psi_-(x)e^{2i k_F x} + \Psi_-^\dagger(x)\Psi_+(x)e^{-2i k_F x}}_{\text{densité à } q \simeq 2k_F}$$

$$\rho_{q=0}(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \Phi(x) \quad \rho_{q=2k_F}(x) = \frac{1}{\pi} \cos(2k_F x - \sqrt{4\pi} \Phi(x))$$

$$\rho(x) = \rho_{q=0}(x) + (\rho_{\text{DOW}}(x) + \text{h.c.}) \quad \rho_{\text{DOW}}(x) = \frac{e^{2i k_F x}}{2\pi} e^{-i \sqrt{4\pi} \Phi(x)}$$

Déterminer : $\langle \phi_{\text{cow}}^+(x) \phi_{\text{cow}}(0) \rangle = \frac{e^{-i u_c x}}{(2\pi)^2} \underbrace{\langle e^{+i u_c \phi(x)} e^{-i u_c \phi(0)} \rangle}_{\text{fonction de corrélation des exposants bosoniques pour une théorie avec } 1/m ???}$

G_{cow} lié à l'ordre du type
onde de densité de charge.

Remarque : fermions diraux : courants de bord dans les systèmes de Hall.

III - Fermions 1D avec spin (couplage spin-charge)

L'une des propriétés les plus remarquables du modèle de Tomonaga-Luttinger est la séparation des degrés de liberté de spin et de charge. Au niveau de la fonction de Green à une particule cette séparation se "constitue" en partant de la fonction de Green libre :

$$G(x, t) = \frac{1}{x - ut} = \frac{1}{(x - u_c t)^{\frac{1}{2}} (x - u_s t)^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow \frac{1}{(x - u_c t)^{\gamma_c} (x - u_s t)^{\gamma_s}}$$

où $u_{c,s}$: vitesses des excitations de charge/spin

$$\text{et } \gamma_i = \frac{k_i + k_i^{-1}}{4} \quad \{i = c, s\}.$$

Au niveau de la fonction spectrale $A(\varepsilon, k) = -\text{Im } G^R(\varepsilon, k)$ on a alors deux pics centrés autour du spectre des excitations de charge et de spin.

Cette séparation est exacte dans le cadre des modèles de TL. On a une séparation des espaces de Hilbert associés à la charge et au spin.

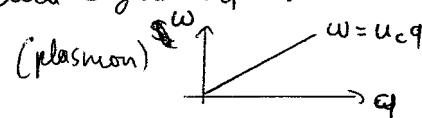
Dans le langage bosonique, elle se traduit par :

$$\mathcal{H} = \frac{u_c}{2} \left[\gamma_c \pi_\phi^2 + \frac{1}{\gamma_c} (\partial_x \phi)^2 \right] + \frac{u_s}{2} \left[\gamma_s \pi_\sigma^2 + \frac{1}{\gamma_s} (\partial_x \sigma)^2 \right] \quad \text{cf. séparation}$$

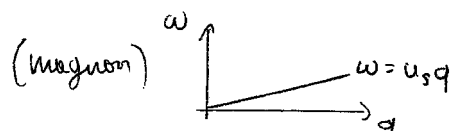
$$\text{où } \rho_c(x) = \rho_\uparrow(x) + \rho_\downarrow(x) = -\frac{1}{\pi} \partial_x \phi(x) \quad \text{et} \quad \rho_s(x) = \rho_\uparrow(x) - \rho_\downarrow(x) = -\frac{1}{\pi} \partial_x \sigma(x).$$

On peut donc définir deux facteurs de structure dynamiques :

- charge : $S_c(\omega, q) = -\text{Im} \langle |\rho_c(\omega, q)|^2 \rangle$



- spin : $S_s(\omega, q) = -\text{Im} \langle |\rho_s(\omega, q)|^2 \rangle$



En suivant ② nous souhaitons tenir compte des termes de non-linéarité du spectre de bande (en particulier la courbure) et déterminer leur effet sur les FSD de charge et de spin. (16)

Une difficulté est que ces termes non-pertinents induisent un couplage entre les degrés de liberté de charge et de spin...

III - A - Analyse par Ansatz de Bethe du modèle de Hubbard 1D

Nous résumons brièvement les conclusions de N. Andrei qui a analysé le modèle de Hubbard 1D au moyen de l'Ansatz de Bethe.

Pour plus voir: N. Andrei, "Integrable Models in Condensed Matter Physics", ICTP lectures (1994) - cond-mat/9408101.

les excitations fondamentales du modèle de Hubbard 1D sont:

- le holon et anti-holon (particule et trou): chargés, sans spin.
- le spinon: non chargé avec un spin $\frac{1}{2}$.

L'examen attentif des résultats de l'Ansatz de Bethe montre que, sous le $\frac{1}{2}$ -remplissage, le déphasage ("phase shift") associé à une paire, par exemple spinon-spinon, fait intervenir la diffusion d'un spinon sur l'autre mais aussi sur le continuum de charges.

N. Andrei déclare: "les secteurs de spin et de charge sont couplés: les excitations de spin ~~implique~~ conduisent à une réorganisation des degrés de liberté de charge et vice-versa. Il n'y a que dans la limite de basse énergie (modèle de TL) qu'un découplage total prend place".

Valable: * en dessous du $\frac{1}{2}$ -remplissage (cas d'un métal)
* pour des interactions répulsives ($U > 0$).

Par Ansatz de Bethe les f^{ns} de corrélation ne sont pas (encore) calculables...

III - B - Analyse par théorie des champs

(17)

Ici on résume brièvement les résultats de: Brazovskii, Matveenko et Nozières JETP Lett. 58 796 (1993) et Matveenko & Brazovskii JETP 78 892 (1994).

Ces auteurs ont combiné deux approches:

- Ansatz de Bethe pour le modèle de Hubbard 1D répulsif sous le demi-remplissage (cf. N. Andrieu III. A)

- bosonisation

pour déterminer le courant de quasi-particules de fermions 1D fortement corrélés. L'analyse par Ansatz de Bethe montre que les excitations de spin portent un courant de charge. Cette violation de la séparation spin charge ne peut être comprise dans l'approximation d'un spectre linéaire. Pour concilier les approches par Ansatz de Bethe et bosonisation (basse énergie) les auteurs invoquent le besoin d'une bosonisation non-linéaire (cf. tenir compte de la parabolicité du spectre):

$$H = \frac{u_c}{2} \left[\gamma_c \pi_\phi^2 + \frac{1}{\gamma_c} (\partial_x \phi_c)^2 \right] + \frac{u_s}{2} \left[\gamma_s \pi_\sigma^2 + \frac{1}{\gamma_s} (\partial_x \sigma)^2 \right] - \frac{\pi}{6m} \left[(\partial_x \phi)^3 + 3 \partial_x \phi \pi_\phi^2 + \underbrace{3 \partial_x \phi \left[(\partial_x \sigma)^2 + \pi_\sigma^2 \right] + 6 \pi_\phi \partial_x \sigma \pi_\sigma}_{\text{couplage spin-charge}} \right]$$

la théorie des champs est divergente $\omega \rightarrow \begin{cases} u_c q \\ u_s q \end{cases}$

III - C - Perspectives

Pour les FSD de spin et de charge (limites $q \rightarrow 0$; $q \sim 2\hbar\epsilon$)

les fonctions de Green à une particule (propriétés spectrales)

il n'existe pour l'instant aucun calcul non-perturbatif par rapport aux interactions et à la courbure de bande ...

↳ Pertinence de solutions à des modèles du type "spin"-Calogero-Sutherland

$$H_{SCS} = -\frac{1}{2m} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i < j} \frac{\lambda (\partial + P_{ij})}{d(x_i - x_j)} ; \quad P_{ij} \text{ échange le spin des particules } i \text{ et } j$$

↳ introduit par Z.N.C. Ha et F.D.M. Haldane PRB 46 9359 (1992)

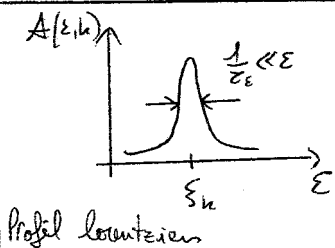
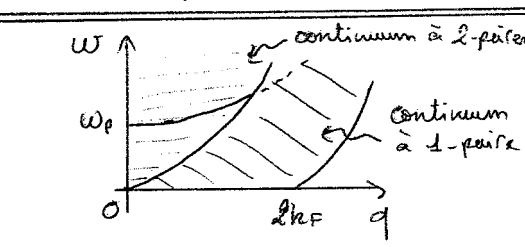
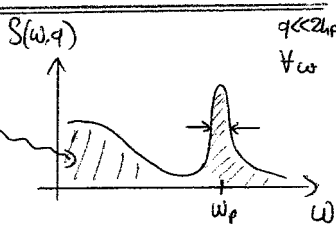
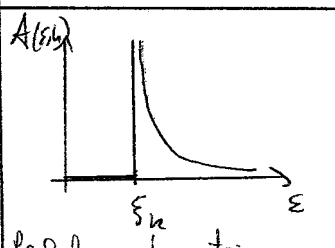
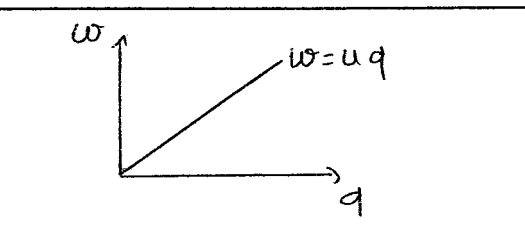
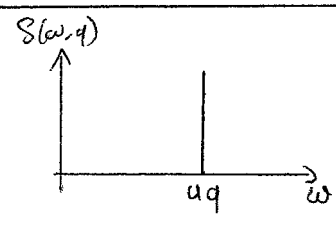
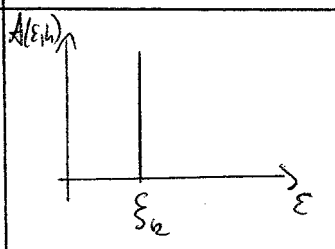
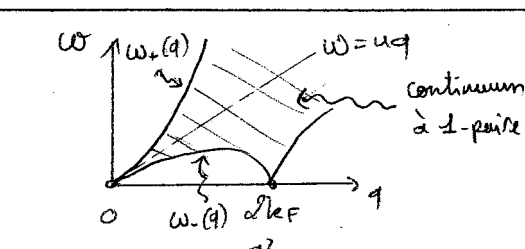
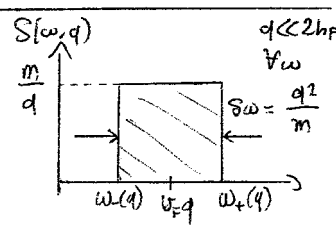
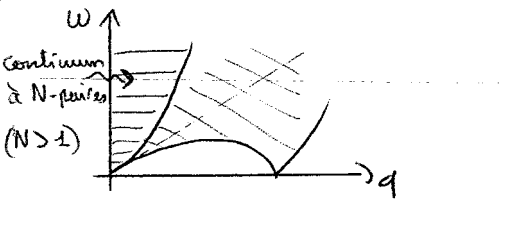
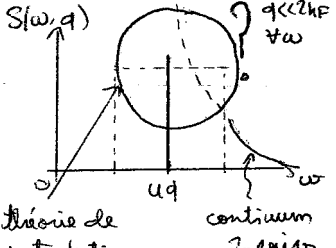
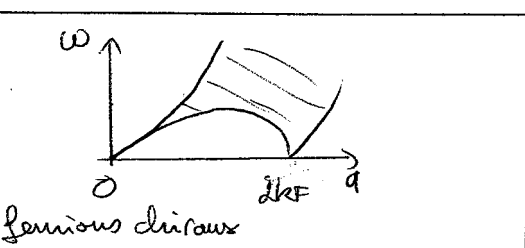
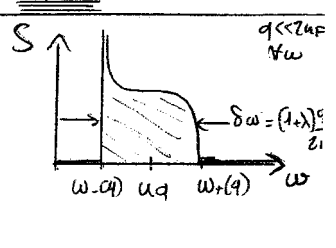
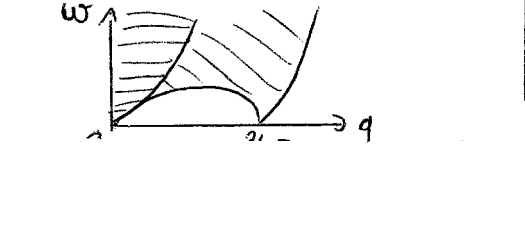
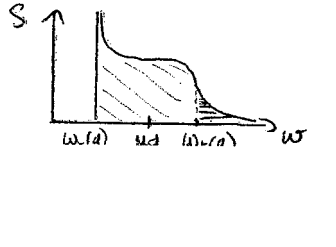
cf. travaux "récents" de D. Uglov, Comm. Math. Phys. 191 663 (1998)

A suivre ...

IV. Conclusions

18

Pour les sections I et II. (fermions sans spin).

	Propriétés spectrales	Spectre des excitations (part-trou)	FSD
Liquide de Fermi (3D) §. I-A	 Profil lorentzien	 continuum à 2-paires continuum à 1-paire	 $q \ll 2k_F$ $\forall \omega$
Liquide de Tomonaga-Luttinger (interactions + $\frac{1}{m} = 0$) §. I-B	 Profil non-lorentzien	 $\omega = uq$	 uq
Fermions libres en D=1 + $\frac{1}{m}$ §. I-C		 $\omega_{\pm}(q) = v_F q \pm \frac{q^2}{2m}$	 $q \ll 2k_F$ $\forall \omega$ $\delta\omega = \frac{q^2}{m}$
Fermions 1D + interactions perturbatifs $\frac{1}{m}$ §. I-C. II-A	?	 continuum à N-paires (N>1)	 $q \ll 2k_F$ $\forall \omega$ théorie de perturbation explose.
Slogers-Sutherland §. II-b	?	 fermions chiraux	 $q \ll 2k_F$ $\forall \omega$ $\delta\omega = \frac{(1+\lambda)\pi}{2}$
Fermions 1D + interaction + $\frac{1}{m}$ §. I-C II-C	?		

① Introduction

I - A - Liquide de Fermi:

- * D. Pines et P. Nozières, "The Theory of Quantum Liquids", vol. 1 (1989)
Théorie générale des liquides de Fermi
- * D. F. DuBois et M. G. Kivelson, Phys. Rev. 186 409 (1969)
Atténuation des plasmons 3D
- * Mishchenko, Reizer et Glazman PRB 69 115302 (2004)
Une référence pour l'atténuation de plasmons 2D (suit la méthode de DuBois et Kivelson et corrige un papier de Reizer et Vinokur)

I - A - Non-liquide de Fermi:

- * Ouvrages généraux portant sur le modèle de Hubbard 1D:
 - F. H. L. Essler, H. Frahm, F. Göhmann, A. Klümper et V. E. Korepin, "The One-Dimensional Hubbard Model", Cambridge University Press (2005).
 - I. Affleck dans: "Fields, Strings and Critical Phenomena", les Houches Session XLIX, édité par E. Brézin et S. Zinn-Justin, Elsevier Science Publishers (1990).
- * Ouvrages généraux portant sur les fermions fortement corrélés en D=1:
 - T. Giamarchi, "Quantum Physics in One Dimension", Oxford Un. Press (2004)
 - A. G. Gogolin, A. A. Nersisyan et A. M. Tsvelik, "Bosonization and Strongly Correlated Systems", Cambridge Un. Press (2004).
 - D. I. Masyov cond-mat/0506035
- * I. Dzyaloshinski et A. I. Larkin Sov. Phys. JETP 38 2012 (1974)
Solution exacte du modèle de Tomonaga (RPA exacte).
- * F. Bloch ZS. Phys. 81 363 (1933)
Bosonisation "intuitive"
- * S.-I. Tomonaga Prog. Th. Phys. 5 544 (1950)
Formalise l'intuition de Bloch

- * D.C. Mattis et E.H. Lieb J. Math. Phys. 6 304 (1965) (29)
 (voir aussi: J. M. Luttinger, J. Math. Phys. 4 4154 (1963))
 A. Luther et V.J. Peschel Phys. Rev. B 9 2911 (1974); F.D.M. Haldane J. Phys C 14
 la bosonisation version "basse énergie". 2585 (1981).
 * S. Coleman Phys. Rev. D 11 2088 (1975)
 la bosonisation version "haute énergie".

I.C. Au-delà du modèle de Tomonaga-Luttinger

- * H. Schick Phys. Rev. 166 604 (1968)
 Prise en compte de la courbure de bande pour le calcul de grandeurs
 thermodynamiques. MS remarque la pertinence de ces termes / problème
 d'atténuation de plasmons 1D. MS remercie F. Bloch à la fin de son article.
 * K.V. Samokhin J. Phys.: Condens. Matter 10 L533 (1998)
 Échec de l'approximation de Born self-consist. pour le calcul du
 facteur de structure dynamique
 * Pustilnik, Mishchenko, Glazman et Andreev PRL 91 12 6805 (2003)
 Courbure de bande et transconductance par entraînement coulombien.
 Première estimation de la largeur du pic de plasmon 1D.
 * D.N. Aristov PRB 76 085327 (2007)
 Re-considère le problème de Pustilnik et al PRL 91 (2003) sous l'angle de
 la bosonisation.
 * Pustilnik, Khodas, Kamenev et Glazman PRL 96 196405 (2006)
 Profil du facteur de structure de fermions sous spin au moyen d'une
 analogie avec le problème de singularité $\times$.
 * Pereira, Sirker, Gaux, Hagenmoss, Maillet, White et Affleck PRL 96 257202
 (2006)
 FSD par Ansatz de Bethe, théorie des champs, DMRG.
 Accord avec Pustilnik et al PRL 96 (2006).
 * Kopietz et Pirooznia Eur. Phys. J. B 58 291 (2007)

I. Fermions 1D sans spin et modèle de Calogero-Sutherland

(21)

II. A. Brève introduction au modèle de Calogero-Sutherland

* Ouvrage général: B. Sutherland, "Beautiful Models", World Scientific (2004)

* Z.N.C. Ha PRL 73 1574 (1994)

Calcul exact du facteur de structure dynamique.

II. B. Modèle de Calogero-Sutherland et plasmons 1D

* M. Pustilnik PRL 97 036404 (2006)

lien entre la solution exacte de Ha et la physique des plasmons 1D.

III. Fermions 1D avec spin

III. A. Analyse par Ansatz de Bethe

* N. Andrei, "Integrable Models in Condensed Matter Physics", ICTP lectures (1994) - cond-mat/9408101.

Couplage spin-charge ~~sa~~ dans le modèle de Hubbard 1D.

III. B. Ansatz de Bethe et théorie des champs

* Brazovskii, Matveenko et Nozières JETP letters 58 796 (1993)

* Matveenko et Brazovskii JETP 78 892 (1994)

les excitations de spin portent une charge...

III. C. Perspectives

* ZNC Ha et FDM Haldane PRB 46 9359 (1992)

Modèles type: spin-Calogero-Sutherland (s-CS)

* D. Uglov, Comm. Math. Phys 191 663 (1998)

Calcul de FSD de $\left\{ \begin{array}{l} \text{charge du modèle de sCS} \dots \\ \text{spin} \end{array} \right.$