

Intégrabilité et physique de la matière condensée

• nombres quantiques fractionnaires

Ex: modèle de Hubbard 1D.

→ excitation de spin $1/2$: $\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow$ → excitation neutre: $\uparrow \downarrow \circ \uparrow \downarrow \uparrow$ Excitation physique: $\uparrow \downarrow \circ \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow$ (se décompose en une excitation de spin $1/2$ et une excitation neutre).• Dynamique

Les effets intéressants sont obtenus en modifiant de l'extérieur les paramètres de l'Hamiltonien. On peut envisager deux cas limite: perturbation soudaine, et perturbation adiabatique, sachant que pour un système avec beaucoup de degrés de liberté, on s'attend (surtout si l'on étudie un système critique) à ce que du point de vue des modes les plus lents, la perturbation soit soudaine, alors que pour les modes rapides, elle puisse au contraire être considérée comme adiabatique.

Exemples

1) Expansion d'un condensat de Bose (ondes de choc quantiques).

2) Dynamique d'un condensat que l'on fait interférer avec lui-même
→ question de la thermalisation (rôle des quantités conservées)

3) Passage par un point de transition de phase { Ising, Mott }

→ modèle pour la nucléation de défauts topologiques...

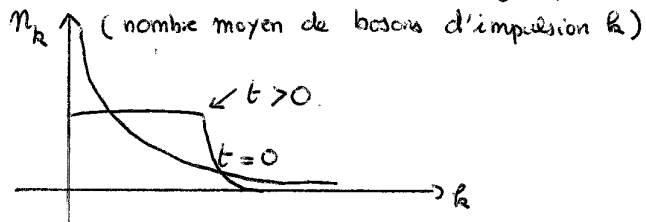
4) Modification de la force des interactions → apparition d'états liés (résonances de Feshbach).

1) Expansion d'un condensat de Bose

Une manière très simple expérimentalement de modifier l'Hamiltonien d'interaction est de couper au temps $t=0$ le potentiel de confinement d'un gaz d'atomes bosoniques. Le gaz se dilue alors, ce qui permet de visualiser la distribution en impulsion initiale.

Toutefois, il a été montré, notamment en une dimension, qu'il est crucial de tenir compte des interactions, y compris dans la phase où le gaz devient dilué.

* Ref: "Fermionization in an expanding 1D Gas of Hard-core bosons", M. Rigol & A. Muramatsu
P.R.L. 94, 240403, (2005).

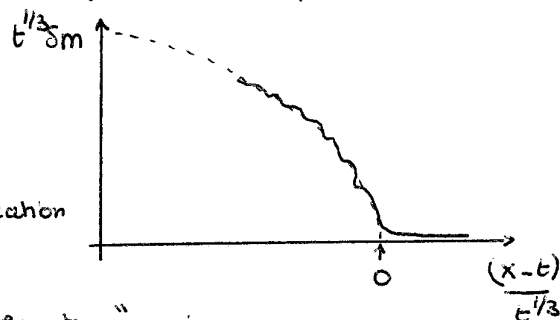


Dans cet article, l'attention est dirigée sur la distribution des impulsions. Mais on peut s'intéresser à la structure spatiale des fronts (régions où la densité spatiale de particules varie beaucoup).

* Ref: "Dynamic scaling of fronts in the quantum XX chain", V. Itunyadi, Z. Rácz, L. Sasvári, Phys. Rev. E 69, 066103, (2004).

Ces auteurs partent d'une condition initiale avec un saut d'aimantation S^z (ce qui correspond à un saut de la densité de particules). Avec le temps, ces fronts développent une structure fine (en escalier).

La hauteur des marches est en $t^{-1/3}$ et leur largeur en $t^{1/3}$, si bien que l'air sous chaque marche est quantifiée! "The front displays a staircase magnetization profile which has a simple interpretation in terms of single spin flips spread over the spatial extent of the steps".



Ces "ondes de choc quantiques" ont fait l'objet de travaux très intéressants de P. Wiegmann et collaborateurs. Voici par exemple:

* Ref: Non linear quantum shock waves in fractional Quantum Hall Edge states, E. Bettelheim, A. Abanov, and P. Wiegmann, PRL 97, 246401 (2006).

"An arbitrary small and smooth disturbance of electronic density and momentum (a wave-packet) will inevitably form a shock wave evolving to shot-noise-like oscillatory features".

Ces auteurs montrent que ces ondes de choc quantiques sont la conséquence de deux hypothèses (i) Il existe une "hydrodynamique quantique", mettant en jeu la densité $\hat{\rho}(x)$ et la vitesse $\hat{v}(x)$ locales

(ii) Les liquides en question ont l'invariance de Galilée et sont compressibles.

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{d\hat{\rho}}{dt} + \nabla(\hat{\rho}\hat{v}) = 0 \\ \frac{d\hat{v}}{dt} + \nabla\left(\frac{\hat{v}^2}{2} + \hat{w}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{où l'enthalpie est fonction de la seule densité.}$$

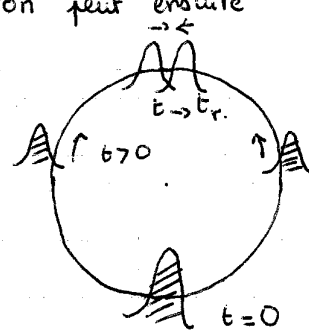
Dans cet article, il s'agit du modèle de Calogero-Sutherland.

"We will show that any initially smooth semiclassical excitation collapses into oscillatory features which further evolve into regularly structured localized pulses carrying a fractionally quantized charge - soliton trains".

Dans le contexte de la physique des condensats, on peut imaginer des protocoles plus compliqués. Par exemple, on peut imaginer un condensat 1D sur un anneau, maintenu sur une petite portion de l'anneau par un potentiel de confinement harmonique. On peut ensuite appliquer deux faisceaux laser en sens inverse, qui décalent l'impulsion de chaque particule du condensat de $\pm \hbar k$ ($k = \frac{\omega}{c}$ est le vecteur d'onde des faisceaux laser).

Si on coupe immédiatement après le potentiel de confinement, le condensat se sépare en deux paquets d'impulsions opposés, que l'on peut ensuite faire interférer, comme dans l'expérience des fentes d'Young.

La densité spatiale de particules au temps t_r montre des interférences qui ont été calculées dans un cas particulier (bosons 1D avec répulsion δ infinie) dans le papier:



* Ref: "Interference of a Thermal Tonks gas on a Ring",

K.K. Das, M.D. Girardeau, and E.M. Wright, P.R.L. 89, 170404, (2002).

Des expériences d'interférences de ce genre (avec une géométrie différente) ont été reportées (sur des "puces à atomes froids") par un groupe de Boulder:

* Ref: "Atom Michelson interferometer on a chip using a Bose-Einstein Condensate".
Phys. Rev. Lett 94, 090405, (2005).

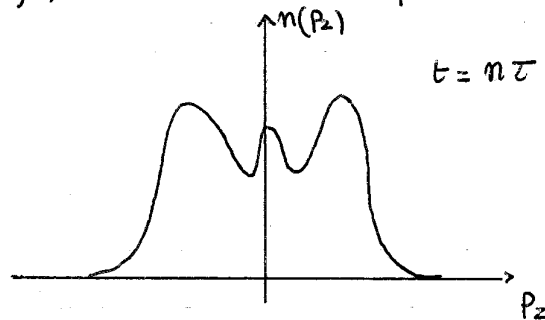
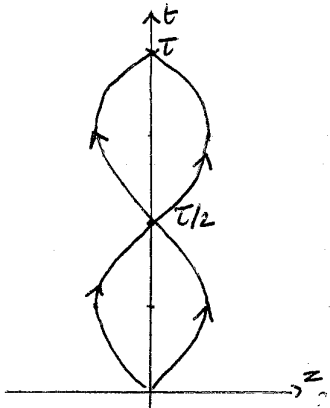
2) Dynamique d'un condensat "intégrable"

Cette idée de faire interférer un condensat avec lui-même est à la base d'une jolie expérience, reportée dans:

* Ref: "A quantum Newton's cradle" by T. Kinoshita, T. Wenger & D. Weiss; Nature 440, 900, (2006).

L'idée consiste à réaliser environ 1000 à 8000 condensats tubulaires, avec typiquement une centaine d'atomes par tube. Le long des tubes, on a un potentiel de confinement anharmonique. On envoie des pulses laser qui donnent une impulsion $\pm 2\hbar k$ aux atomes dans la direction $\hat{z}$ parallèle aux tubes. Les condensats 1D se séparent, mais se recombinent en un temps fini à cause du potentiel de confinement anharmonique (qui n'est pas coupé tout de suite après les pulses laser). Au bout d'un temps t variable, on finit par couper ce potentiel, ce qui permet d'imager la distribution de l'impulsion longitudinale des condensats (les milliers de condensats en parallèle permettent d'avoir plus de signal).

Le point essentiel est que même si l'on attend un grand nombre de recombinaisons (40 périodes) (avec donc des collisions entre particules), la distribution en impulsion ne se thermalise PAS!



$$t = n\tau, n \text{ entier.}$$

Cette expérience a suscité un grand nombre de travaux théoriques, liés à la question de la thermalisation pour un système quantique isolé. Soit $|\psi(0)\rangle$ l'état du système à $t=0$.

On peut le décomposer sur la base des états propres: $|\psi(0)\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle$

Donc $|\psi(t)\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} e^{-iE_{\alpha}t/\hbar} |\alpha\rangle$ et pour toute observable A :

$$\langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \sum_{\alpha, \beta} \bar{c}_{\alpha} c_{\beta} \exp(i \frac{E_{\alpha} - E_{\beta}}{\hbar} t) A_{\alpha\beta}$$

On peut concevoir que si l'on attend un temps très long, les éléments de matrice non-diagonaux se moyennent à zéro et que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 A_{\alpha\alpha}$$

(même prédiction que pour un mélange statistique $\rho = \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 |\alpha\rangle\langle\alpha|$).

On peut se poser les questions suivantes:

- i) La limite $t \rightarrow \infty$ existe-t-elle toujours?
- ii) Si oui, peut-on ~~remplacer~~ le mélange statistique ρ (qui dépend de l'état initial) par une matrice densité qui n'en dépend pas? (il y aurait donc une perte de mémoire des conditions initiales)
- iii) Si oui, comment cette matrice densité effective se compare-t-elle aux ensembles génériques de la ϕ statistique (microcanonique, canonique, etc...)?

Il semble, comme on peut s'y attendre, que les réponses dépendent beaucoup de la nature (intégrable ou non) du système. Notons en particulier les deux références:

* Ref: "Relaxation in a Completely Integrable Many-Body Quantum System: An initial study of the dynamics of the highly excited states of the 1D lattice hard-core bosons",
M. Rigol et al, Phys. Rev. Lett 98, 050405, (2007)

* Ref: "Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems", by
M. Rigol, V. Dunjko & M. Olshanii, arXiv: 0708.1324

Les deux articles étudient un système de bosons à deux dimensions, le premier en dimension 1 et le second en dimension 2 (non intégrable). Dans les deux cas, l'observable A est le nombre moyen de bosons d'impulsion k . L'état initial est préparé par diagonalisation de l'Hamiltonien du système ~~et~~ confiné dans une boîte plus petite que celle dans laquelle il évolue ensuite.

Dans les deux cas, i) et ii) sont vérifiées (pour le type de conditions initiales envisagées).

Par contre, on a des différences marquées au niveau de iii):

- Cas non-intégrable: $\rho_{\text{eff}} = \rho_{\text{microcanonique}}$ (mais pas canonique)
- Cas intégrable: $\rho_{\text{eff}} = \frac{1}{Z_{\text{eff}}} \exp(-\sum_k \lambda_k \hat{n}_F(k))$ tient compte de toutes les quantités conservées ($\hat{n}_F(k)$ est ρ_{eff} le nombre de fermions de Jordan-Wigner d'impulsion k).

Explication de la convergence vers $\rho_{\text{microcanonique}}$ dans le cas non-intégrable: les éléments de matrice d'un opérateur local $\langle \alpha | A | \alpha \rangle$ ne semblent dépendre que de l'énergie α , ce qui évoque un comportement chaotique. Dans le cas intégrable, $\langle \alpha | A | \alpha \rangle$ dépend de toutes les quantités conservées.

3) Passage (non-adiabatique) par un point de transition de phase.

Plutôt que de provoquer une expansion soudaine du système, on peut varier des paramètres comme la force des interactions, ou des champs extérieurs. Du point de vue expérimental, un système qui a eu beaucoup de succès récemment est celui d'un gas de Bose d'atomes froids piégés dans un potentiel périodique (induit par le réseau d'interférences entre plusieurs faisceaux laser). Voir en particulier:

* Ref: "Collapse and revivals of the matter wave field of a Bose-Einstein condensate",

H. Greiner, O. Mandel, T. W. Hänsch, and I. Bloch, Nature 419, 51, (2002).

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} a_i^\dagger a_j + \frac{1}{2} U \sum_i a_i^\dagger a_i (a_i^\dagger a_i - 1). \quad (\text{modèle de Bose-Hubbard, non intégrable, même en } D=1).$$

$$|\Psi_{SF}\rangle_{U=0} \propto \left(\sum_{i=1}^N a_i^\dagger \right)^N |0\rangle \quad |\Psi_{MI}\rangle_{J=0} \propto \prod_{i=1}^N (a_i^\dagger)^n |0\rangle$$

Dans l'état superfluide, le nombre de particules sur chaque site fluctue. L'état de chaque site est bien approché par un état cohérent: $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ $|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$

Lorsque l'on induit la phase isolante (expérimentalement on réduit l'amplitude tunnel pour passer d'un puits à l'autre, en augmentant la puissance des lasers qui créent le potentiel périodique), le système est dominé par l'interaction locale (U), et l'état cohérent $|\alpha\rangle$ évolue selon $|\alpha(t)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{i}{\hbar} U(n-1)t} |n\rangle$.

→ comme $U n(n-1)$ n'est pas une fonction linéaire de $|n\rangle$, on obtient un brouillage de l'état cohérent lorsque $\frac{U \bar{n} \Delta n t}{\hbar}$ est de l'ordre de l'unité (avec $\bar{n} = \Delta n^2 = |\alpha|^2$).

Ce brouillage se manifeste de la façon suivante: Lorsque l'on repasse la transition (soudainement) pour revenir du côté superfluide, on ne détecte pas de condensat de Bose (la phase de $a_i^\dagger$ n'est pas définie).

Mais si $\frac{U t}{\hbar}$ est $2\pi \times$ entier, on assiste à une résurgence de l'état cohérent, révélée par la présence d'un condensat de Bose si l'on repasse (soudainement) du côté superfluide.

Es expériences spectaculaires ont ici encore motivé des études théoriques concernant le passage rapide de la transition superfluide - isolant de Mott.

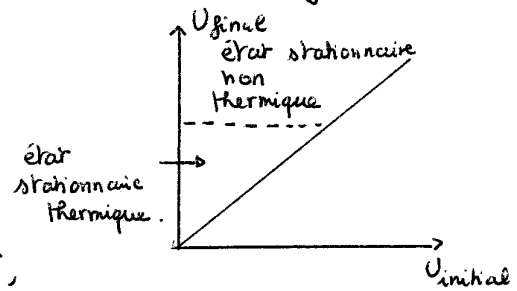
* Ref: "Quench dynamics and non-equilibrium phase diagram of the Bose-Hubbard model",

C. Kollath, A. Läuchli, and E. Altman, Phys. Rev. Lett. 98, 180601, (2007).

Ici, il s'agit du passage superfluide → isolant de Mott, dans la limite des temps longs (après le passage soudain par la transition). Les oscillations cohérentes (résurgences) finissent par disparaître et les fonctions de corrélation $\langle a_n^\dagger a_0 \rangle$ prennent une valeur asymptotique plus grande, à la fois que pour le fondamental et pour la matrice densité thermique avec l'Hamiltonien

final. On observe donc une sorte de thermalisation dans un état non thermique, bien que le système soit non-intégrable. Les résultats sont résumés dans le diagramme. On peut penser que ce système reste "proche" d'un système intégrable.

Les résultats sont qualitativement confirmés par le travail:



* Ref: "Strongly correlated fermions after a quantum quench",

J.R. Manmana, S. Wessel, R.H. Noack, and A. Muramatsu, Phys. Rev. Lett. 98, 210405, (2007).

Il s'agit ici d'un modèle légèrement différent (fermions sans spin sur réseau équivalent à l'Hamiltonien XXZ dans la phase massive anti-ferromagnétique $\Leftrightarrow$ isolant de Mott }
dans la phase critique (Luttinger) $\Leftrightarrow$ superfluide }

$$H = -t_h \sum_j (C_{j+1}^\dagger C_j + h.c.) + V \sum_j n_j n_{j+1} \quad (\text{modèle } D=1)$$

On peut détruire l'intégrabilité en ajoutant un petit terme en $V_2 \sum_j n_j n_{j+2}$.

La méthode est un peu différente: ici on choisit deux conditions initiales qui ont la même énergie moyenne et qui se trouvent cependant dans les deux phases possibles. Puis on augmente soudainement V . En étudiant la distribution en impulsion $\langle C_k^\dagger C_k \rangle$, on voit apparaître génériquement un état stationnaire hors d'équilibre non thermique, qui se met aussi à dépendre de l'état initial si $|V_2 - V|$ devient grand. Le caractère intégrable ou non (si V_2 varie autour d'une petite valeur) ne semble pas jouer beaucoup.

Mon impression (remarque personnelle) est que l'Hamiltonien reste sans doute proche d'une dynamique intégrable, pour les valeurs de V_2 (0.4 et 1.0) étudiées ici.

Question posée par ce travail: si l'on tenait compte explicitement des quantités conservées de la chaîne XXZ (si $V_2 = 0$), pourrions-nous retrouver la distribution en impulsion observée pour un ensemble statistique généralisé comme celui défini par Rigol et al. (PRL 98, 050405, (2007))?

D'un point de vue théorique, il y a eu beaucoup de travaux consacrés au passage de la transition quantique (à $T=0$) dans le modèle d'Ising en $D=1+1$.

Citons par exemple:

* Ref: "Dynamics of a quantum phase transition", W.H. Zurek, U. Dörner, P. Zoller, Phys. Rev. Lett. 95, 105701, (2005)

* Ref: "Dynamics of a quantum phase transition: exact solution of the quantum Ising model", J. Dziarmaga, Phys. Rev. Lett. 95, 245701, (2005).

* Ref: "Entropy and Correlation functions of a driven quantum spin chain", R.W. Cherno, and L.S. Levitov, Phys. Rev. A 73, 043614, (2006).

Je parlais seulement du dernier article, car c'est sans doute le plus complet.

(7)

$$\mathcal{H}(t) = -\frac{1}{2} \sum_{x=1}^N J_1 \sigma_x^1 \sigma_{x+1}^1 + J_2 \sigma_x^2 \sigma_{x+1}^2 - R(t) \sigma_x^3$$

(si $J_1 = J_2$, on a le modèle XY isotrope, et si $J_2 = 0$ le modèle d'Ising).

On s'intéresse au cas où $R(t)$ évolue de $-\infty$ à $+\infty$: on passe deux fois le point de transition

$\xrightarrow{\text{désordonnée}} \xrightarrow{\text{ordonnée}} \xrightarrow{\text{désordonnée}} t$

Par transformation de Jordan-Wigner, on se ramène à des fermions sans spin avec un hamiltonien dépendant du temps. Si l'on fixe R , le spectre est donné par

$$E(k) = \pm \left[(R + J \cos k)^2 + \gamma^2 J^2 \sin^2 k \right]^{1/2}$$

$$J = \frac{1}{2} (J_1 + J_2)$$

$$\gamma = \frac{J_1 - J_2}{J_1 + J_2}$$

Le gap s'annule pour $\gamma = 0$ (XY) et $|k| \leq J$, ou encore ($\gamma \neq 0$) pour $k = \pm J$.

→ on se ramène à une collection de problèmes de Landau-Zener dépendant du temps.

$$H = - \sum_{k>0} \left\{ (R(t) + J \cos k) (a_k^\dagger a_k + a_{-k}^\dagger a_{-k}) + i \gamma J \sin k (a_k^\dagger a_{-k}^\dagger - a_{-k} a_k) \right\}$$

La solution est de la forme $\prod_{k>0} (u_k(t) + v_k(t) a_k^\dagger a_{-k}^\dagger) |0\rangle$, avec :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t) + J \cos k & -2i \gamma J \sin k \\ 2i \gamma J \sin k & -R(t) - J \cos k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} \quad \text{avec } \psi_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$$

$$\alpha_k = \frac{(2\gamma J \sin k)^2}{2(dR/dt)} = \frac{4\gamma^2 J^2}{2v} \sin^2 k$$

$\alpha_k \ll 1$: gap is small → anti-adiabatique
 $\alpha_k \gg 1$: grand gap → adiabatique.

Si le paramètre $\frac{\gamma^2 J^2}{v}$ est grand (passage très lent),

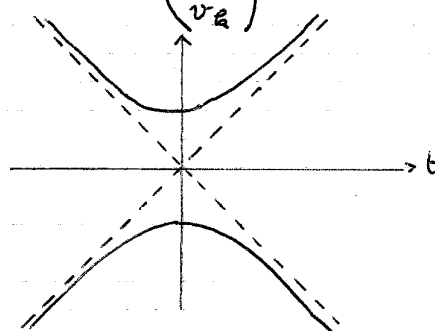
presque tous les modes seront assez rapides pour s'ajuster, sauf ceux pour lesquels $|\sin k|$ est très petit → création d'excitations (défauts topologiques).

On peut voir ici un processus de décroissance intrinsèque (si l'on calcule des observables locales attachées à un segment de longueur fixée).

Physiquement, la frontière $\Delta k \approx \frac{v^{1/2}}{\gamma J}$ entre les modes "rapides" et les modes "lents" (ou modes "critiques") correspond à une échelle de longueur $\ell(v) \approx \frac{\gamma J}{v^{1/2}}$. Pour ce problème,

on retrouve l'échelle de longueur de Kibble et Zurek (dans le contexte de la nucléation de défauts topologiques lors du refroidissement dans une phase de symétrie brisée), qui repose sur l'argument de causalité suivant : si l'on a une théorie relativiste (c étant la vitesse, ($c = \gamma J$ ici) de propagation d'une action causale), et que le paramètre de

masse $m = v/|t|$, on a une longueur de corrélation $\xi(t) = \frac{c}{v/|t|}$ pour le problème à l'équilibre instantané. Mais si $|t| \rightarrow 0$, la longueur de corrélation augmente trop vite, si bien que le système ne peut pas rester à l'équilibre. Il y a donc une longueur de corrélation maximale $\xi_{\max}$ donnée par le critère : $\frac{d\xi}{dt} = c$ lorsque $\xi_{\max} = \xi(t)$.



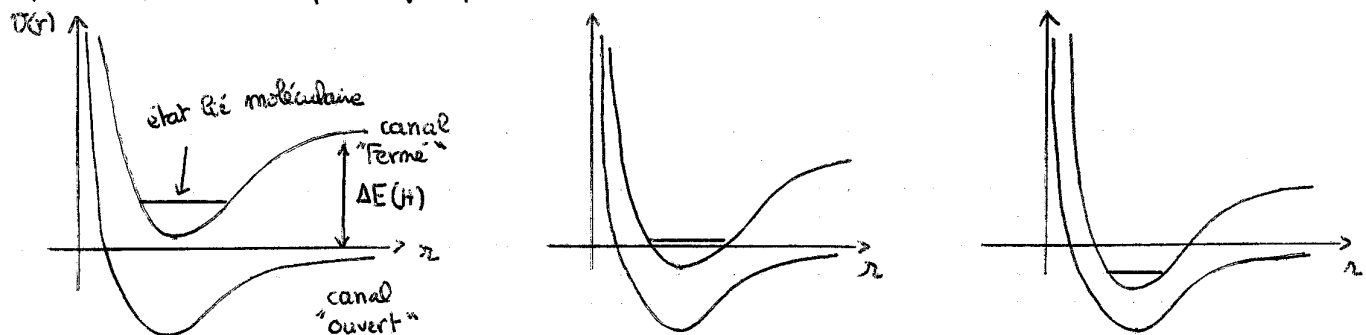
On trouve donc que $\xi_{\text{Max}} = \frac{c}{v^{1/2}}$. Pour notre problème, $\xi_{\text{Max}} = \frac{\hbar J}{v^{1/2}}$. (8)

Ces idées, sur le rôle de la causalité (et de l'intrication quantique) ont été généralisées notamment dans :

- * Ref: "Time Dependence of Correlation functions following a quantum quench",
P. Calabrese & J. Cardy, PRL 96, 136801, (2006).

4) Instabilité dynamique induit par un changement de la force des interactions.

Ici, nous allons nous intéresser à une situation un peu différente, dans laquelle le système (condensat de fermions en interaction) ne subit pas de transition de phase (on reste dans un état superfluide à $T=0$), mais évolue entre deux limites : celle d'un condensat de paires d'atomes lorsque l'attraction est faible (limite de Bardeen-Cooper-Schrieffer) et celle d'un condensat de molécules bosoniques purement diatomiques (limite de Bose-Einstein), obtenu en présence d'une forte attraction. Le critère pour décider de la force de l'interaction consiste typiquement à comparer le coût en énergie pour créer une paire avec l'énergie cinétique moyenne par atome dans la mer de Fermi de même densité. De manière à peu près équivalente, on peut comparer la taille d'une paire avec la distance moyenne entre atomes. Dans le régime BCS, la première est beaucoup plus grande que la seconde, alors que c'est l'inverse dans le régime B.E. La physique des atomes froids est en mesure de varier très commodément la force des interactions, en variant par exemple le champ magnétique extérieur, grâce au mécanisme des résonances de Feshbach.



Résonance de Feshbach

Les deux canaux se rapportent à des niveaux hyperfins différents pour le système de deux atomes dont on étudie la collision. L'écart en énergie ΔE est sensible au champ magnétique, ce qui permet d'ajuster la position d'un état lié du canal "fermé" par rapport au zéro d'énergie (correspondant à l'état asymptotique de deux atomes éloignés).

Hamiltonien effectif

On suppose que les molécules sont formées dans un état d'impulsion totale nulle ; l'Hamiltonien s'écrit alors :

$$H = \sum_k \epsilon_k (c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} + c_{k\downarrow}^\dagger c_{k\downarrow}) + \omega b^\dagger b + g \sum_k (b^\dagger c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} + b c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger)$$

Ici $\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$. Dans un piège atomique, on fixe plutôt le

nombre de particules, mais ici, il sera commode de supposer que le potentiel chimique μ est fixé. Le paramètre de contrôle est ω .

Lorsque l'on prépare le système à $t=0$ dans une mer de Fermi :

$|\Psi(t=0)\rangle = \prod_k \theta(-\epsilon_k) c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger |0\rangle$, on voit que l'évolution ultérieure ne fait intervenir que des états où $(k\uparrow)$ et $(-k\downarrow)$ sont simultanément occupés ou vides. On peut donc décrire l'état du gaz de fermions en termes de spin $1/2$:

$$\begin{cases} (k\uparrow) \text{ et } (-k\downarrow) \text{ occupés} \Leftrightarrow S_k^z = 1/2 \\ (k\uparrow) \text{ et } (-k\downarrow) \text{ vides} \Leftrightarrow S_k^z = -1/2 \end{cases} \quad \text{soit } n_{k\uparrow} + n_{-k\downarrow} = 1 + 2S_k^z$$

Dans ce sous-espace, on peut alors réécrire l'Hamiltonien sous la forme :

$$H_{\text{sp-boson}} = \sum_k 2\epsilon_k S_k^z + \omega b^\dagger b + g \sum_k (b^\dagger S_k^- + b S_k^+)$$

A $t=0$, si l'on abaisse brusquement la valeur de ω (en partant de $\omega=\infty$), on a un état initial factorisé, où $\begin{cases} 2S_k^z |\Psi(t=0)\rangle = -\text{signe}(\epsilon_k) |\Psi(t=0)\rangle \\ b |\Psi(t=0)\rangle = 0 \end{cases}$

La question que nous nous posons est de déterminer l'évolution quantique aux temps positifs, avec ω fini constant. Notons que quantiquement, l'état de départ n'est pas un état propre, car si on lui applique $b^\dagger S_k^-$ pour $\epsilon_k < 0$, on obtient un état non nul, qui lui est orthogonal. Les fluctuations quantiques vont donc jouer un rôle important dans l'étude de la dynamique. Toutefois, comme nous allons le montrer, comprendre la dynamique classique s'avère très utile.

Dynamique classique associée.

On les obtient en partant des équations de Heisenberg pour l'évolution des valeurs moyennes, puis on fait l'hypothèse que la valeur moyenne d'un produit est le produit des valeurs moyennes. Ceci peut se justifier (formellement) en remplaçant les spins $1/2$ par des spins S , en faisant ensuite l'hypothèse $S \gg 1$.

$$\begin{cases} \dot{b} = -i\omega b - ig \sum_{k=1}^n S_k^- \\ \dot{S}_k^z = -i2\epsilon_k S_k^- + i2g S_k^z b \\ \dot{S}_k^- = i2\epsilon_k S_k^- + i2g S_k^z b \end{cases} \quad \dot{S}_k^z = ig(b^\dagger S_k^- - b S_k^+)$$

Cette dynamique classique préserve la longueur des spins $S^2 = (S^z)^2 + S^+ S^-$. ⑩
 L'état initial correspond à $S_k^z = -S \text{ signe}(\epsilon_k)$; $S_k^+ = S_k^- = 0$, $b = b^+ = 0$,
 donc c'est un point d'équilibre pour la dynamique classique.

Montrons que la stabilité de cet équilibre dépend de ω :

Equations du mouvement classiques linéarisées:

$$\begin{cases} \dot{b} = -i\omega b - ig \sum_k S_k^- \\ \dot{S}_k^- = -i2\epsilon_k S_k^- - i2gS \text{ signe}(\epsilon_k) b \end{cases}$$

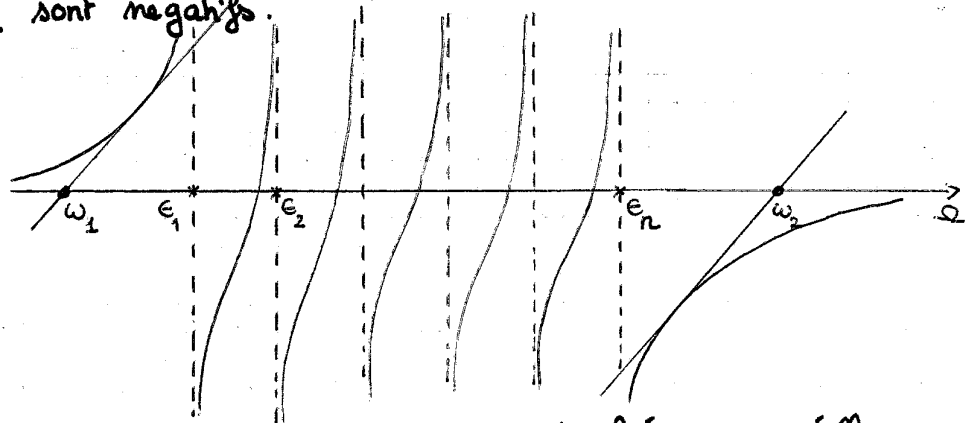
Si l'on pose $b = \tilde{b} e^{-i\Omega t}$ et $S_k^- = \tilde{S}_k^- e^{-i\Omega t}$, on trouve:

$$\begin{cases} \Omega \tilde{b} = \omega \tilde{b} + g \sum_k \tilde{S}_k^- \\ \Omega \tilde{S}_k^- = 2\epsilon_k \tilde{S}_k^- + 2gS \text{ signe}(\epsilon_k) \tilde{b} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \tilde{S}_k^- = \frac{2gS}{\Omega - 2\epsilon_k} \text{ signe}(\epsilon_k) \tilde{b}$$

On a donc l'équation séculaire:

$$\Omega = \omega + 2g^2 S \sum_k \frac{\text{signe}(\epsilon_k)}{\Omega - 2\epsilon_k}$$

Pour y voir plus clair (la physique n'est pas fondamentalement modifiée), on va supposer que tous les ϵ_k sont négatifs.



On voit que si $\omega < \omega_1$ ou $\omega > \omega_2$, on a $n-1+2 = n+1$ fréquences réelles.
 Si $\omega > \omega_2$, l'état (classique) de départ est un minimum local de l'énergie.
 Si $\omega_1 < \omega < \omega_2$, on a des instabilités de la dynamique, car seules $n-1$ fréquences sont réelles.

Forme normale au voisinage du point d'équilibre instable.

Appelons $\pm\Omega_\alpha$ ($1 \leq \alpha \leq n-1$) les fréquences réelles. Les quatre fréquences complexes ont la forme $\pm\Omega_0 \pm i\gamma$

On peut écrire:

$$\delta H = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \Omega_\alpha \bar{A}_\alpha A_\alpha + (\Omega_0 + i\gamma) \bar{A}_s A_u + (\Omega_0 - i\gamma) \bar{A}_u A_s$$

Où A_α, A_u, A_s sont les amplitudes complexes des déviations dans les directions de type oscillateur, instables, et stables.

La dynamique (Hamiltonienne) des petites déviations est engendrée par la forme symplectique :

$$\Omega_S = -i \sum_{\alpha=1}^N (d\bar{A}_\alpha \wedge dA_\alpha) - i d\bar{A}_u \wedge dA_s - i d\bar{A}_s \wedge dA_u$$

(Les équations du mouvement sont obtenues en posant :

$$\Omega_S(\dot{A}; dA) = d(SH)$$

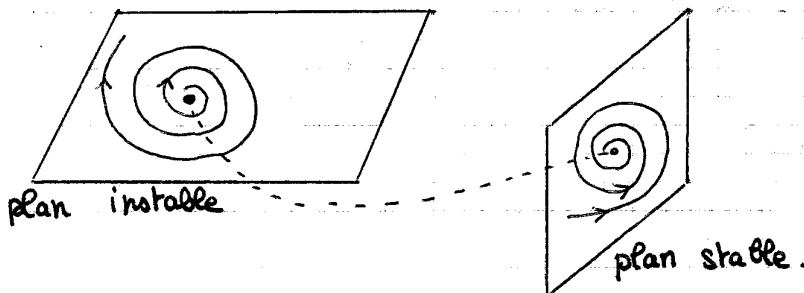
$$\text{d'où : } \dot{A}_\alpha = -i\Omega_\alpha A_\alpha ; \quad \dot{A}_u = (-i\Omega_0 + \gamma) A_u ; \quad \dot{A}_s = (-i\Omega_0 - \gamma) A_s$$

Par ailleurs, le nombre total de particules est un polynôme de degré 1 en $L = b^\dagger b + \sum_k S_k^z$. Nous avons :

$$\delta L = \sum_\alpha \bar{A}_\alpha A_\alpha + \bar{A}_s A_u + \bar{A}_u A_s.$$

Supposons que l'on regarde la variété de niveau du point fixe instable pour ces quantités conservées ($\delta H = 0$, $\delta L = 0$), avec la contrainte $A_\alpha = 0$ (on n'exclut PAS les modes oscillants). On obtient les conditions :

$\bar{A}_s A_u = \bar{A}_u A_s = 0$. On obtient la réunion de deux droites complexes (deux plans sur $\mathbb{R}$), l'un qui correspond au mouvement instable, et l'autre au mouvement stable $\rightarrow$ on a un point fixe hyperbolique.



Conjecture : ces mouvements qui démarrent au voisinage du pt fixe dans le plan instable, reviennent ultérieurement dans le plan stable.

Remarque : du point de vue du comptage des degrés de liberté, cela ressemble au point d'équilibre instable du potentiel en forme de "chapeau mexicain". On peut montrer que les formes normales deviennent identiques si $\Omega_0 = 0$.

Evolution quantique aux temps courts

Il est commode d'utiliser la transformation de Holstein-Primakov :

$$S^+ |S-m\rangle = \sqrt{2S-(m-1)} \sqrt{m} |S-(m-1)\rangle \quad \text{suggère d'écrire : } S^z = S - a^\dagger a$$

$$\begin{cases} S^+ = \sqrt{2S - a^\dagger a} a \\ S^- = a^\dagger \sqrt{2S - a^\dagger a} \end{cases}$$

et au voisinage du point d'équilibre instable, on a $\begin{cases} S^+ \approx \sqrt{2S} a \\ S^- \approx \sqrt{2S} a^\dagger \end{cases}$

Remarque : cette transformation est bien adaptée au cas $\epsilon_k < 0$, car S_k^z est proche de sa valeur maximale. Il faut adapter la définition au cas $\epsilon_k > 0$.

Avec cette approximation, l'Hamiltonien s'écrit:

$$H_{osc} = \sum_k 2|\epsilon_k| a_k^\dagger a_k + \omega b^\dagger b + g\sqrt{2S} \sum_{\epsilon_k < 0} (b^\dagger a_k^\dagger + b a_k) + g\sqrt{2S} \sum_{\epsilon_k > 0} (b^\dagger a_k + a_k^\dagger b)$$

↑ "fluctuation" quantique

L'état initial est le "vide" de tous ces oscillateurs. $a_k|0\rangle = b|0\rangle = 0$.

Il n'est pas difficile de voir que l'état au temps t pas trop long a la forme d'un état cohérent:

$$|4(t)\rangle = f(t) \exp\left(\sum_{\epsilon_k < 0} A_k(t) a_k^\dagger b^\dagger + \sum_{\epsilon_k < 0} \sum_{\epsilon_{k'} > 0} B_{kk'}(t) a_k^\dagger a_{k'}^\dagger\right) |0\rangle.$$

Dans le cas où tous les $\epsilon_k < 0$, on a $B=0$, et l'écriture se simplifie.

Il est intéressant de poursuivre le calcul dans ce cas: on trouve notamment la distribution de probabilité du nombre n de molécules formées: $P(n;t) = (1-c(t)) c(t)^n$ avec $c(t) = \sum_{\epsilon_k < 0} |A_k(t)|^2$

On trouve une distribution thermique (Bose-Einstein) de molécules,

avec $\langle n(t) \rangle = \frac{c(t)}{1-c(t)}$.

Le calcul donne: $\boxed{\langle n(t) \rangle = \frac{2Sg^2}{\gamma^2} \sin^2(\gamma t)}$ (valable aux temps courts).
 → "température effective" dépendant du temps.

Que peut-on dire aux temps longs?

Il est utile pour l'intuition de regarder le modèle à 1 spin. Une référence intéressante est l'article suivant:

Réf: "Coherent spontaneous emission", R. Bonifacio and G. Preparata, Phys. Rev. A 2, 336, (1970).

Il est commode d'introduire les variables canoniques (n, θ) et (S^z, φ) :

$$\begin{cases} b = \sqrt{n} e^{-i\theta} \\ b^\dagger = \sqrt{n} e^{i\theta} \end{cases} \quad \begin{cases} S^+ = \sqrt{S^z - (S^z)^2} e^{i\varphi} \\ S^- = \sqrt{S^z - (S^z)^2} e^{-i\varphi} \end{cases}$$

L'Hamiltonien à 1 spin s'écrit:

$$H = -2|\epsilon| S^z + \omega n + 2g \sqrt{S^z - (S^z)^2} \sqrt{n} \cos(\theta - \varphi)$$

Comme $S^z + n$ est conservée, on a invariance par les rotations $\begin{cases} \theta \mapsto \theta + \alpha \\ \varphi \mapsto \varphi + \alpha \end{cases}$

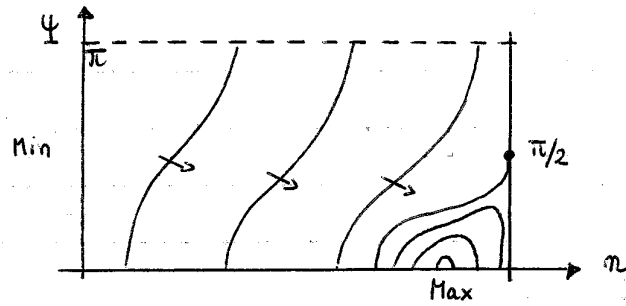
On peut donc effectuer une réduction symplectique. Sur la variété de niveau du point instable, on a $S^z + n = S$ et $H = -2|\epsilon| S$.

Posons $\psi = \theta - \varphi$, on a un Hamiltonien efféctif:

$$H_{eff}(\psi, n) = -2|\epsilon| S + (2|\epsilon| + \omega)n + 2g n \sqrt{2S - n} \cos \psi.$$

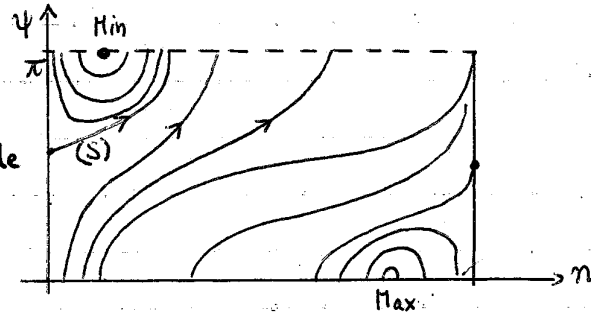
On peut étudier la déformation des portraits de phase:

$$\omega > \omega_2 = -2|\epsilon| + 2g\sqrt{2S} :$$

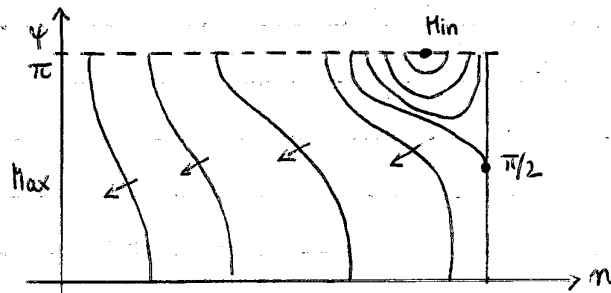


$$\omega_1 = -2|\epsilon| - 2g\sqrt{2S} < \omega < \omega_2 :$$

L'instabilité dynamique du point $n=0$ se traduit par l'apparition de la séparatrice (S).



$$\omega < \omega_1 :$$



Bonifacio & Preparata ont analysé le cas résonant (le système est légèrement différent, on part d'un état excité, mais correspond à notre cas où $2|\epsilon| + \omega = 0$).

En faisant une approximation semi-classique, ils obtiennent que $\langle n(t) \rangle$ est une fonction périodique du temps, avec la période $2T$, $T = \frac{\ln(2S)}{\sqrt{2S}}$ ($g=1$)

Chaque pulse a un profil qui ressemble à la trajectoire classique sur la séparatrice: $\langle n(t) \rangle \simeq 2S \operatorname{sech}^2(\sqrt{2S}(t - (2m+1)T))$

Par ailleurs, ils obtiennent une statistique thermique pour le nombre de bosons à tout instant.

Les résultats posent plusieurs questions:

- 1) Il serait intéressant de leur donner une dérivation qui insiste davantage sur l'analogie avec la physique classique sous-jacente. Il me semble frappant, en effet, de voir émerger la trajectoire classique sur la séparatrice, alors qu'aux temps courts, l'évolution du système au voisinage du point instable est totalement dominée par les effets quantiques.
- 2) Les simulations numériques (O. Babelon par exemple) montrent bien ces pulses quasi-périodiques, mais ceux-ci ne durent pas indéfiniment! Il

serait important de développer des méthodes de calcul pour l'évolution aux temps longs !

3) Je pose alors la question de généraliser ces résultats aux systèmes avec plusieurs spins ($n \geq 2$). Le modèle quantique spin-boson est intégrable (modèle de Gaudin). Mais il semble fructueux d'exploiter d'abord l'intégrabilité de la limite classique. Ce programme est motivé par les considérations suivantes :

- L'analyse des mouvements au voisinage du point instable avait permis d'identifier $n-1$ modes d'oscillateurs et une variété symplectique de dimension 4 associée aux fréquences complexes. L'intégrabilité du modèle classique permet de donner une signification globale à cette description de l'espace des phases. On peut donc identifier une sous variété symplectique de dimension 4 dans l'espace des phases de dimension $2n+2$ qui est stable pour la dynamique, et dont les trajectoires sont en étroite correspondance avec celles du modèle à $n=1$. Ceci est notamment bien analysé dans l'article suivant :

* Ref: "Integrable dynamics of coupled Fermi-Bose condensates",

E. A. Yuzbashyan, V. B. Kuznetsov, & B. L. Altshuler, Phys. Rev. B 72, 144524 (2005)

- Du côté des mathématiciens, il semble qu'il existe maintenant des méthodes assez générales pour étudier la dynamique quantique au voisinage d'un point hyperbolique isolé de la dynamique classique. Voir par exemple :

* Ref: "Singular Bohr-Sommerfeld rules", Y. Colin de Verdière & B. Parisse, Comm. Math. Phys. 205, 453-200, (1999).

La synthèse entre ces deux ingrédients reste à faire !