Notes sur les Etats Cohérents & les Intégrales de chemin pour le moment cinétique

Valentin Bois, stage de M1 sous la direction de Michel Talon

Table des matières

Chapitre 1

Etats cohérents de l'oscillateur harmonique

On donne quelques résultats fondamentaux sur l'oscillateur harmonique. Dans la base propre usuelle $(|n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ l'effet des opérateurs d'annihilation $\hat{a}$ et de création $\hat{a}^\dagger$ est le suivant :

$$\begin{aligned} \hat{a}\,|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle && (1.1) \\ \hat{a}^\dagger\,|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle && (1.2) \end{aligned}$$

La relation de commutation de ces opérateurs est :

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = \hat{1}$$

On définit un état cohérent (ou encore un état de Glauber) pour l'oscillateur harmonique de la manière suivante :

$$|z\rangle := e^{z\hat{a}^\dagger}\,|0\rangle\,, \qquad z \in \mathbb{C}$$

Nous allons maintenant montrer quelques propriétés de ce vecteur.

1.1 Expression en série, composantes

Nous utilisons le développement en série de l'exponentielle pour écrire :

$$|z\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \left(\hat{a}^\dagger\right)^k |0\rangle$$

On utilise l'équation (1.2) pour enlever les opérateurs de création :

$$|z\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sqrt{k!}\,|k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\sqrt{k!}}\,|k\rangle$$

Alors on en déduit immédiatement $\langle n|z\rangle$:

$$\langle n|z\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\sqrt{k!}}\,\langle n|k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\sqrt{k!}}\delta_{nk}$$

On trouve donc que :

$$\langle n|z\rangle = \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \tag{1.3}$$

1.2 Produit scalaire, norme, état normé

Cherchons maintenant à trouver l'expression de $\langle z_2|z_1\rangle$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Utilisons l'expression en série :

$$\langle z_2|z_1\rangle = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \frac{\bar{z}_2^m z_1^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m|n\rangle = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \frac{\bar{z}_2^m z_1^n}{\sqrt{m!n!}} \delta_{mn} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(\bar{z}_2 z_1)^n}{n!}$$

On reconnait le développement d'une exponentielle, alors :

$$\langle z_2|z_1\rangle = e^{\bar{z}_2 z_1}$$

Nous en déduisons la norme $\||z\rangle\|$ de $|z\rangle$:

$$\||z\rangle\| = \sqrt{\langle z|z\rangle} = e^{|z|^2/2}$$

Nous en déduisons que l'état $e^{-|z|^2/2}|z\rangle$ est normé. Nous allons utiliser cet état pour écrire la relation de fermeture.

1.3 Relation de fermeture

On peut, en posant $x := \Re(z)$ et $y := \Im(z)$, voir le vecteur $|z\rangle$ comme un vecteur qui est caractérisé par deux nombres réels $|x, y\rangle$. Le vecteur normé correspondant est alors $e^{-(x^2+y^2)/2}|x, y\rangle$, et on écrit un opérateur que l'on suppose être très ressemblant à l'identité :

$$\hat{\mathrm{O}} := \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ e^{-(x^2+y^2)} |x, y\rangle \langle x, y|$$

Si cet opérateur est le bon, on devrait avoir $\langle m|\hat{\mathrm{O}}|n\rangle \sim \delta_{mn}$:

$$\langle m|\hat{\mathrm{O}}|n\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ e^{-(x^2+y^2)} \langle m|x, y\rangle \langle x, y|n\rangle$$

Mais l'équation (1.3) donne :

$$\langle m|\hat{\mathrm{O}}|n\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ e^{-(x^2+y^2)} \frac{z^m \bar{z}^n}{\sqrt{m!n!}}$$

Maintenant si on pose $z := \rho e^{i\theta}$, alors en passant en coordonnées polaires :

$$\langle m|\hat{\mathrm{O}}|n\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\ \rho^{m+n} e^{-\rho^2} \frac{e^{i(m-n)\theta}}{\sqrt{m!n!}} = \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \int_0^\infty \rho^{m+n+1} e^{-\rho^2} \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} \mathrm{d}\theta$$

On vérifie aisément que :

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} \mathrm{d}\theta = 2\pi\delta_{mn} \tag{1.4}$$

Si bien que :

$$\langle m|\hat{\mathrm{O}}|n\rangle = \frac{2\pi}{n!} \delta_{mn} \int_0^\infty \rho^{2n+1} e^{-\rho^2} \mathrm{d}\rho$$

Or, si l'on pose :

$$\mathcal{A}_n\left(a\right) := \int_0^\infty \rho^{2n+1} e^{-a\rho^2} \mathrm{d}\rho, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Alors on vérifie facilement que :

$$\mathcal{A}_{n+1}\left(a\right) = -\frac{\partial \mathcal{A}_n}{\partial a}\left(a\right)$$

Cette relation de récurrence a pour premier terme :

$$\mathcal{A}_0\left(a\right) = \int_0^\infty \rho e^{-a\rho^2} \mathrm{d}\rho = -\frac{1}{2a}\left[e^{-a\rho^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2a}$$

En itérant la relation de récurrence on finit par écrire que :

$$\mathcal{A}_n\left(a\right) = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

Alors :

$$\langle m|\hat{\mathrm{O}}|n\rangle = \frac{2\pi}{n!}\delta_{mn}\mathcal{A}_n\left(1\right) = \pi\delta_{mn}$$

Nous avions donc oublié le terme en π qui n'était pas trivial ! Il était difficile à déterminer car les vecteurs $|z\rangle$ ne sont pas orthogonaux deux à deux (ils forment tout de même une base complète grâce au passage à la limite en l'infini dans le plan complexe). Nous remarquons aussi que nous n'aurions jamais obtenu le dernier résultat si $z \in \mathbb{C}$, c'est à dire si z ne variait pas sur TOUT le plan complexe (la droite réelle n'aurait pas suffit), ce qui est une justification a posteriori de l'espace dans lequel varie z. Finalement la relation de fermeture s'écrit :

$$\hat{1} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}\ e^{-(x^2+y^2)}\left|x, y\right\rangle\left\langle x, y\right|$$

1.4 Notation complexe

Nous allons maintenant écrire la relation de fermeture non plus en fonction de parties réelles et imaginaire de z, mais en fonction de z et de $\bar{z}$. Pour cela rappelons nous que nous avons :

$$\begin{aligned} x &= \frac{z+\bar{z}}{2} \\ y &= \frac{z-\bar{z}}{2i} \end{aligned}$$

Ou encore sous relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

La matrice jacobienne est alors :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,\bar{z})} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

L'élément infinitésimal est alors :

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,\bar{z})}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}$$

Alors :

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{i}{2}\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}$$

Alors la relation de fermeture est :

$$\hat{1} = -\int_{\mathbb{C}} \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}}{2i\pi}\ e^{-\bar{z}z}\,|z\rangle\langle z|$$

1.5 Vecteurs propres

Calculons maintenant l'effet des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ sur les états cohérents :

$$\hat{a}\,|z\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\sqrt{k!}}\hat{a}\,|k\rangle$$

On utilise l'équation (1.2) :

$$\hat{a}\,|z\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}z^k}{\sqrt{k!}}\,|k-1\rangle = z\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^l}{\sqrt{l!}}\,|l\rangle$$

Si bien que :

$$\hat{a}\,|z\rangle = z\,|z\rangle$$

Puis pour l'opérateur de création :

$$\hat{a}^\dagger\,|z\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\sqrt{k!}}\hat{a}^\dagger\,|k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1}z^k}{\sqrt{k!}}\,|k+1\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)z^k}{\sqrt{(k+1)!}}\,|k+1\rangle$$

Nous n'obtenons pas grand résultat de ce calcul. En changeant d'indice on a encore :

$$\hat{a}^\dagger\,|z\rangle = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{lz^{l-1}}{\sqrt{l!}}\,|l\rangle$$

Ce qui ressemble à une expression dérivée en z de $|z\rangle$ ...

1.6 Interprétation physique

Nous savons que les opérateurs de position $\hat{x}$ et d'impulsion $\hat{p}$ (réduits) vérifient :

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}\\ \hat{p} &= \frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Alors, les valeurs moyennes de ces opérateurs en $e^{-\bar{z}z/2}\,|z\rangle$ (états normés) sont :

$$\begin{aligned}\langle x\rangle(z) &= e^{-\bar{z}z}\,\langle z|\hat{x}|z\rangle\\ \langle p\rangle(z) &= e^{-\bar{z}z}\,\langle z|\hat{p}|z\rangle\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}\langle x\rangle(z) &= \frac{e^{-\bar{z}z}}{\sqrt{2}}\,\langle z|\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}|z\rangle \\ \langle p\rangle(z) &= \frac{e^{-\bar{z}z}}{i\sqrt{2}}\,\langle z|\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}|z\rangle\end{aligned}$$

Nous utilisons les résultats trouvé précédement :

$$\begin{aligned}\langle x\rangle(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(z+\bar{z}) \\ \langle p\rangle(z) &= \frac{1}{i\sqrt{2}}\,(z-\bar{z})\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\langle x\rangle(z) &= \sqrt{2}\Re(z) \\ \langle p\rangle(z) &= \sqrt{2}\Im(z)\end{aligned}$$

Parties réelle et imaginaire de z sont liées aux valeurs moyennes en position et en impulsion respectivement ! Déterminons maintenant l'écart type, pour cela, calculons $\langle x^2\rangle(z)$ et $\langle p^2\rangle(z)$:

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle(z) &= e^{-\bar{z}z}\,\langle z|\hat{x}^2|z\rangle \\ \langle p^2\rangle(z) &= e^{-\bar{z}z}\,\langle z|\hat{p}^2|z\rangle\end{aligned}$$

Soit, en utilisant la relation de fermeture :

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle(z) &= \frac{1}{2}e^{-\bar{z}z}\,\langle z|\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger 2}+\hat{1}+2\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|z\rangle \\ \langle p^2\rangle(z) &= -\frac{1}{2}e^{-\bar{z}z}\,\langle z|\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger 2}-\hat{1}-2\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|z\rangle\end{aligned}$$

Donc, en utilisant les valeurs propres :

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle(z) &= \frac{1}{2}\left(1+z^2+\bar{z}^2+2\bar{z}z\right) \\ \langle p^2\rangle(z) &= -\frac{1}{2}\left(-1-z^2+\bar{z}^2+2\bar{z}z\right)\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle(z) &= \frac{1}{2}\left(1+(z+\bar{z})^2\right) \\ \langle p^2\rangle(z) &= \frac{1}{2}\left(1+i^2\,(z-\bar{z})^2\right)\end{aligned}$$

Si bien que :

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle(z) &= \frac{1}{2}+\langle x\rangle^2(z) \\ \langle p^2\rangle(z) &= \frac{1}{2}+\langle p\rangle^2(z)\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\Delta x(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Delta p(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Nous pouvons écrire une égalité du type inégalité de Heisenberg (réduite en dimensions) :

$$\Delta x(z)\,\Delta p(z) = \frac{1}{2}$$

Cette égalité est une inégalité saturée, ces états sont très classiques, d'où le nom d'états cohérents.

1.7 Bilan

Au délà de toutes les propriétés algébriques amusantes de ces états, ils permettent surtout de passer d'une description des états par une base décrite de manière discrète (sur $\mathbb{N}$) à une description par une base décrite de manière continue (sur $\mathbb{C}$). C'est par ce moyen que l'on va réussir à écrire les intégrales de chemins pour le spin, l'astuce étant, en temps normal, d'insérer de relation de fermeture intégrales, ce qui est non aisé sur la base $|n\rangle$ ou encore sur la base $|j, m_j\rangle$ du moment cinétique !

Chapitre 2

Etats cohérents pour le moment cinétique

Pour le moment cinétique (de nombre principal j), les opérateurs $\hat{\mathrm{J}}_x, \hat{\mathrm{J}}_y, \hat{\mathrm{J}}_z$ de moment cinétique vérifient :

$$\left[\hat{\mathrm{J}}_u, \hat{\mathrm{J}}_v\right] = i\varepsilon_{uvw}\hat{\mathrm{J}}_w$$

On introduit les opérateurs d'échelle :

$$\hat{\mathrm{J}}_\pm = \hat{\mathrm{J}}_x \pm i\hat{\mathrm{J}}_y$$

Ces opérateurs vérifient $\hat{\mathrm{J}}_\pm^\dagger = \hat{\mathrm{J}}_\mp$, et nous vérifions la relation de commutation suivante :

$$\left[\hat{\mathrm{J}}_\pm, \hat{\mathrm{J}}_z\right] = \mp\hat{\mathrm{J}}_\pm$$

En effet :

$$\left[\hat{\mathrm{J}}_\pm, \hat{\mathrm{J}}_z\right] = \left[\hat{\mathrm{J}}_x, \hat{\mathrm{J}}_z\right] \pm i\left[\hat{\mathrm{J}}_y, \hat{\mathrm{J}}_z\right] = -i\hat{\mathrm{J}}_y \mp \hat{\mathrm{J}}_x = \mp\left(\hat{\mathrm{J}}_x \pm i\hat{\mathrm{J}}_y\right)$$

On introduit la base propre $\{|j,m\rangle\}_{m\in[\![-j,j]\!]}$ à $\hat{\mathrm{J}}_z$ et $\hat{\mathbf{J}}^2$:

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{J}}_z\,|j,m\rangle &= m\,|j,m\rangle\\ \hat{\mathbf{J}}^2\,|j,m\rangle &= j(j+1)\,|j,m\rangle\end{aligned}$$

On vérifie aussi que :

$$\hat{\mathrm{J}}_\pm\,|j,m\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\,|j,m\pm1\rangle \tag{2.1}$$

On remarque que la facteur devant le vecteur annule $\hat{\mathrm{J}}_+\,|j,j\rangle$ et $\hat{\mathrm{J}}_-\,|j,-j\rangle$. De plus :

$$\hat{\mathrm{J}}_\pm^n\,|j,m\rangle = \|\hat{\mathrm{J}}_\pm^n\,|j,m\rangle\|\,|j,m\pm n\rangle \qquad n\in[\![0,j\mp m]\!] \tag{2.2}$$

On introduit alors les états cohérents du moment cinétique :

$$|z\rangle = e^{z\hat{\mathrm{J}}_+}\,|j,-j\rangle\,, \qquad z\in\mathbb{C}$$

2.1 Expression en série

Ecrivons alors ce vecteur en série :

$$|z\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \hat{\mathrm{J}}_+^k |j, -j\rangle$$

Nous savons qu'en réalité une infinité de termes sont nuls dans cette série :

$$|z\rangle = \sum_{k=0}^{2j} \frac{z^k}{k!} \hat{\mathrm{J}}_+^k |j, -j\rangle \tag{2.3}$$

2.2 Composantes sur la base du moment cinétique

L'objet de ce paragraphe est de déterminer $\langle j, m|z\rangle$. Utilisons pour cela l'expression intégrale :

$$\langle j, m|z\rangle = \sum_{k=0}^{2j} \frac{z^k}{k!} \langle j, m|\hat{\mathrm{J}}_+^k|j, -j\rangle$$

Rappelons nous l'expression (2.2) pour écrire que :

$$\langle j, m|z\rangle = \sum_{k=0}^{2j} \frac{z^k}{k!} \|\hat{\mathrm{J}}_+^k |j, -j\rangle\| \langle j, m|j, k-j\rangle = \sum_{k=0}^{2j} \frac{z^k}{k!} \|\hat{\mathrm{J}}_+^k |j, -j\rangle\| \delta_{m,k-j}$$

Finalement, il ne reste qu'un terme :

$$\langle j, m|z\rangle = \frac{z^{j+m}}{(j+m)!} \|\hat{\mathrm{J}}_+^{j+m} |j, -j\rangle\|$$

On peut préciser cette norme en écrivant, en accord avec la formule (2.1) :

$$\hat{\mathrm{J}}_+^N |j, -j\rangle = \sqrt{\prod_{k=0}^{N-1} (j(j+1) - (k-j)(k-j+1))}\, |j, N-j\rangle$$

Or :

$$j(j+1) - (k-j)(k-j+1) = j^2 + j - k^2 + 2kj - k - j^2 + j = 2j - k^2 + 2kj - k = 2j(k+1) - k(k+1) = (2j-k)(k+1)$$

Si bien que :

$$\hat{\mathrm{J}}_+^N |j, -j\rangle = \sqrt{\prod_{k=0}^{N-1} (2j-k) \prod_{k=0}^{N-1} (k+1)}\, |j, N-j\rangle$$

Mais :

$$\prod_{k=0}^{N-1} (k+1) = \prod_{l=1}^{N} l = N!$$

Et en posant $p := 2j - k$ nous avons :

$$\prod_{k=0}^{N-1}(2j-k) = \prod_{p=2j+1-N}^{2j} p = \frac{\prod_{p=1}^{2j} p}{\prod_{p=1}^{2j-N} p} = \frac{(2j)!}{(2j-N)!}$$

Si bien que :

$$\hat{\mathrm{J}}_+^N \left|j,-j\right\rangle = \sqrt{\frac{(2j)!N!}{(2j-N)!}} \left|j,N-j\right\rangle = N!\sqrt{\binom{2j}{N}} \left|j,N-j\right\rangle \tag{2.4}$$

Ou en norme :

$$\|\hat{\mathrm{J}}_+^N \left|j,-j\right\rangle\| = \sqrt{\frac{(2j)!N!}{(2j-N)!}} = N!\sqrt{\binom{2j}{N}}$$

Alors, utilisant ce dernier résultat :

$$\langle j,m|z\rangle = \frac{z^{j+m}}{(j+m)!}(j+m)!\sqrt{\binom{2j}{j+m}}$$

Soit finalement le résultat suivant :

$$\langle j,m|z\rangle = z^{j+m}\sqrt{\binom{2j}{j\pm m}} \tag{2.5}$$

2.3 Retour à l'expression en série

Nous retournons à l'expression à l'expression en série des états cohérents (2.3), en s'aidant de l'équation (2.4), pour écrire que :

$$|z\rangle = \sum_{k=0}^{2j} \frac{z^k}{k!} k! \sqrt{\binom{2j}{k}} \left|j,k-j\right\rangle$$

On trouve une expression étonnamment simple :

$$|z\rangle = \sum_{k=0}^{2j} \sqrt{\binom{2j}{k}} z^k \left|j,k-j\right\rangle \tag{2.6}$$

2.4 Produit scalaire et norme

La dernière expression ressemble terriblement à un début de binôme de Newton ! Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$\langle z_2|z_1\rangle = \sum_{k,l=0}^{2j} \sqrt{\binom{2j}{l}\binom{2j}{k}} \bar{z}_2^l z_1^k \langle j,l-j|j,k-j\rangle = \sum_{k,l=0}^{2j} \sqrt{\binom{2j}{l}\binom{2j}{k}} \bar{z}_2^l z_1^k \delta_{l-j,k-j}$$

Sommons sur l, il ne reste alors que les termes tels que $l = k$:

$$\langle z_2|z_1\rangle = \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k} (\bar{z}_2 z_1)^k$$

Utilisons la formule du binôme de Newton, en faisant artificiellement apparaître 1^{2j-k} et écrivons finalement que :

$$\langle z_2|z_1\rangle = (1 + \bar{z}_2 z_1)^{2j}$$

La norme d'un vecteur cohérent est alors :

$$\||z\rangle\| = \sqrt{\langle z|z\rangle} = \left(1 + |z|^2\right)^j$$

Nous introduisons alors le vecteur normé suivant :

$$\left(1 + |z|^2\right)^{-j} |z\rangle$$

2.5 Relation de fermeture

De la même manière que pour l'oscillateur harmonique, on cherche une relation de fermeture sous forme intégrale en considérant tout le plan complexe. Toujours avec $x = \Re(z)$ et $y = \Im(z)$, nous définissons naïvement, par anlogie avec l'oscillateur harmonique, l'opérateur suivant, avec les vecteurs normés :

$$\hat{\mathrm{O}} := \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \ \left(1 + |z|^2\right)^{-2j} |z\rangle\langle z|$$

On calcule alors le terme $\langle j, m|\hat{\mathrm{O}}|j, n\rangle$

$$\langle j, m|\hat{\mathrm{O}}|j, n\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \ \left(1 + |z|^2\right)^{-2j} \langle j, m|z\rangle\langle z|j, n\rangle$$

Nous utilisons l'expression (2.5) pour écrire :

$$\langle j, m|\hat{\mathrm{O}}|j, n\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \ \left(1 + |z|^2\right)^{-2j} z^{j+m} \sqrt{\binom{2j}{j \pm m}} \bar{z}^{j+n} \sqrt{\binom{2j}{j \pm n}}$$

Remarquons dès maintenant que cet opérateur ne peut être celui que nous cherchons. Considérons le cas $j = 0$, alors :

$$\langle 0, 0|\hat{\mathrm{O}}|0, 0\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Ce terme diverge ! Sans autre justification que celles données en Annexe, nous allons maintenant nous y essayer avec l'opérateur suivant :

$$\hat{\mathrm{Q}} := \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \ \left(1 + |z|^2\right)^{-2(j+1)} |z\rangle\langle z| \tag{2.7}$$

On pose $z=\rho e^{i\vartheta}$:

$$\langle j,m|\hat{\mathrm{Q}}|j,n\rangle = \sqrt{\binom{2j}{j\pm m}\binom{2j}{j\pm n}}\int_{\mathbb{R}^2}\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\vartheta\ \left(1+\rho^2\right)^{-2(j+1)}\rho^{2j+m+n}e^{i(m-n)\vartheta}$$

Mais on se rappelle par (1.4) que :

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\vartheta}\mathrm{d}\vartheta = 2\pi\delta_{mn}$$

Si bien que :

$$\langle j,m|\hat{\mathrm{Q}}|j,n\rangle = 2\pi\binom{2j}{j\pm m}\delta_{mn}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\rho^{2(j+m)+1}}{\left(1+\rho^2\right)^{2(j+1)}}\mathrm{d}\rho$$

Nous nous occupons maintenant de l'intégrale. On pose $\zeta=\rho^2$:

$$\mathcal{H}_m := \int_{\mathbb{R}^+}\frac{\rho^{2(j+m)+1}}{\left(1+\rho^2\right)^{2(j+1)}}\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\zeta^{j+m}}{(1+\zeta)^{2(j+1)}}\mathrm{d}\zeta$$

Nous pouvons intégrer par parties l'intégrale qui apparaît, en dérivant le monôme, en primitivant le dénominateur :

$$\mathcal{H}_m = \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{2j+1}\frac{\zeta^{j+m}}{(1+\zeta)^{2j+1}}\right]_0^\infty + \frac{j+m}{2j+1}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{\zeta^{j+m-1}}{(1+\zeta)^{2j+1}}\mathrm{d}\zeta\right)$$

Le terme tout intégré est nul, et le second terme en intégrale est similaire à l'intégrale originelle, où l'on a retiré une puissance au numérateur et une puissance au dénominateur. Ainsi en réitérant l'intégration par parties, nous pouvons baisser la puissance du numérateur jusqu'à 0 et nous voyons qu'à chaque fois, le terme tout intégré va être nul (en 0 le numérateur est nul, en l'infini le dénominateur l'emporte et annule aussi le terme). Alors on peut dériver $j+m$ fois (en tout) :

$$\mathcal{H}_m = \frac{1}{2}\frac{(j+m)\times\cdots\times 2}{(2j+1)\times\cdots\times(2j-j-m+2)}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{(1+\zeta)^{2j-j-m+2}}\mathrm{d}\zeta$$

Mais $2j-j-m+2=j-m+2$, et en introduisant des factorielles :

$$\mathcal{H}_m = \frac{1}{2}\frac{(j+m)!(j-m+1)!}{(2j+1)!}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{(1+\zeta)^{j-m+2}}\mathrm{d}\zeta$$

L'intégrale est alors triviale :

$$\mathcal{H}_m = \frac{1}{2}\frac{(j+m)!(j-m+1)!}{(2j+1)!}\frac{1}{j-m+1}\left[-\frac{1}{(1+\zeta)^{j-m+1}}\right]_0^\infty$$

Soit encore :

$$\mathcal{H}_m = \frac{1}{2}\frac{(j+m)!(j-m)!}{(2j+1)!} = \frac{1}{2(2j+1)}\frac{1}{\binom{2j}{j\pm m}}$$

Finalement les composantes de l'opérateur sont :

$$\langle j,m|\hat{\mathrm{Q}}|j,n\rangle = 2\pi\binom{2j}{j\pm m}\delta_{mn}\mathcal{H}_m = 2\pi\binom{2j}{j\pm m}\delta_{mn}\frac{1}{2(2j+1)}\frac{1}{\binom{2j}{j\pm m}}$$

On simplifie et alors :

$$\langle j,m|\hat{\mathrm{Q}}|j,n\rangle = \frac{\pi}{2j+1}\delta_{mn}$$

Nous avons ainsi trouvé la relation de fermeture avec les états cohérents du moment cinétique :

$$\hat{1} = \frac{2j+1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ \left(1+|z|^2\right)^{-2(j+1)} |z\rangle\langle z|$$

2.6 Notation complexe et mesure

Comment nous l'avions fait pour l'oscillateur harmonique, nous écrivons la relation de fermeture plutôt avec les éléments différentiels $\mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}\bar{z}$:

$$\hat{1} = -\frac{2j+1}{2i\pi}\int_{\mathbb{C}} \mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z} \ \left(1+|z|^2\right)^{-2(j+1)} |z\rangle\langle z|$$

Nous pouvons aussi introduire la mesure suivante :

$$\mathrm{d}^2\mu_j(z) := -\frac{2j+1}{2i\pi}\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}}{\left(1+|z|^2\right)^2} = \frac{2j+1}{\pi}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(1+|z|^2\right)^2}$$

Alors la relation de fermeture devient plus intuitive (c'est sans cette mesure que nous avions d'abord essayé de proposer un premier opérateur) :

$$\hat{1} = \int_{\mathbb{C}} \mathrm{d}^2\mu_j(z)\left(1+|z|^2\right)^{-2j} |z\rangle\langle z|$$

2.7 Une propriété utile

Nous allons démontrer la propriété suivante :

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\langle \eta|z\rangle}{\sqrt{\langle\eta|\eta\rangle\langle z|z\rangle}} h\left(\bar{z}\right)\mathrm{d}^2\mu_j(z) = h\left(\bar{\eta}\right)$$

Où l'on a :

$$h\left(z\right) := \frac{\mathcal{P}_m\left(z\right)}{\left(1+|z|^2\right)^j}, \qquad \mathcal{P}_m\left(z\right) \in \mathbb{R}^{m\leq 2j}[z]$$

Où $\mathcal{P}_m$ est donc un polynôme de degré $m \leq 2j$. Comme n'importe quel polynôme se décompose en somme de monôme et que la formule à démontrer est linéaire, on peut démontrer cette relation avec $\mathcal{M}_k\left(\bar{z}\right) = \bar{z}^k, \ k \leq 2j$ au lieu de $\mathcal{P}_m$ dans sa forme la plus générale. Alors :

$$\mathcal{A}_k := \int_{\mathbb{C}} \frac{\langle \eta|z\rangle}{\sqrt{\langle\eta|\eta\rangle\langle z|z\rangle}} \frac{\mathcal{M}_k\left(\bar{z}\right)}{\left(1+|z|^2\right)^j}\mathrm{d}^2\mu_j(z) \tag{2.8}$$

En remplaçant de manière explicite la mesure, les normes on obtient :

$$\mathcal{A}_k = \frac{2j+1}{\pi\left(1+|\eta|^2\right)^j}\int_{\mathbb{C}} \frac{\left(1+\bar{\eta}z\right)^{2j}}{\left(1+|z|^2\right)^{2j+2}}\bar{z}^k\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Nous utilisons la formule du binôme de Newton pour exprimer $(1+\bar{\eta}z)^{2j}$:

$$\mathcal{A}_k = \frac{2j+1}{\pi\left(1+|\eta|^2\right)^j}\sum_{l=0}^{2j}\binom{2j}{l}\int_{\mathbb{C}}\frac{\bar{\eta}^l z^l \bar{z}^k}{\left(1+|z|^2\right)^{2j+2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Nous posons $z = x+iy = \sqrt{s}e^{i\vartheta}$, alors le jacobien du changement de coordonnées cartésien-pseudopolaire est :

$$\det\left(\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(s,\vartheta\right)}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{s}}\cos\left(\vartheta\right) & -\sqrt{s}\sin\left(\vartheta\right) \\ \frac{1}{2\sqrt{s}}\sin\left(\vartheta\right) & \sqrt{s}\cos\left(\vartheta\right) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Si bien que :

$$\mathcal{A}_k = \frac{2j+1}{\left(1+|\eta|^2\right)^j}\sum_{l=0}^{2j}\bar{\eta}^l\binom{2j}{l}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(l-k)\vartheta}\mathrm{d}\vartheta\int_0^{\infty}\frac{s^{\frac{l+k}{2}}}{\left(1+s\right)^{2j+2}}\mathrm{d}s$$

Or, nous avons déjà calculé l'intégrale sur l'angle :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(l-k)\vartheta}\mathrm{d}\vartheta = \delta_{lk}$$

Ainsi dans l'expression de $\mathcal{A}_k$:

$$\mathcal{A}_k = \frac{2j+1}{\left(1+|\eta|^2\right)^j}\sum_{l=0}^{2j}\bar{\eta}^l\binom{2j}{l}\delta_{lk}\int_0^{\infty}\frac{s^k}{\left(1+s\right)^{2j+2}}\mathrm{d}s$$

La somme sur le symbole de Krönecker :

$$\mathcal{A}_k = \frac{2j+1}{\left(1+|\eta|^2\right)^j}\bar{\eta}^k\binom{2j}{k}\int_0^{\infty}\frac{s^k}{\left(1+s\right)^{2j+2}}\mathrm{d}s$$

Mais :

$$\mathcal{B}_k := \int_0^{\infty}\frac{s^k}{\left(1+s\right)^{2j+2}}\mathrm{d}s$$

En utilisant la même méthode que celle par laquelle nous avions déterminé $\mathcal{H}_m$, nous avons :

$$\mathcal{B}_k = \frac{k!(2j-k)!}{(2j+1)!} = \frac{1}{2j+1}\frac{k!(2j-k)!}{(2j)!} = \frac{1}{2j+1}\frac{1}{\binom{2j}{k}}$$

Alors dans l'expression de $\mathcal{A}_k$:

$$\mathcal{A}_k = \frac{\bar{\eta}^k}{\left(1+|\eta|^2\right)^j} = \frac{\mathcal{M}_k\left(\bar{\eta}\right)}{\left(1+|\eta|^2\right)^j} \tag{2.9}$$

Finalement, comme on peut écrire le monôme sous la forme :

$$\mathcal{P}_m\left(\bar{z}\right) = \sum_{k=0}^{m}\lambda_k\bar{z}^k = \sum_{k=0}^{m}\lambda_k\mathcal{M}_k\left(\bar{z}\right), \qquad \forall k:\lambda_k\in\mathbb{C}$$

Alors :

$$\int_{\mathbb{C}}\frac{\langle\eta|z\rangle}{\sqrt{\langle\eta|\eta\rangle\langle z|z\rangle}}h\left(\bar{z}\right)\mathrm{d}^2\mu_j(z) = \int_{\mathbb{C}}\frac{\langle\eta|z\rangle}{\sqrt{\langle\eta|\eta\rangle\langle z|z\rangle}}\frac{\mathcal{P}_m\left(\bar{z}\right)}{\left(1+|z|^2\right)^j}\mathrm{d}^2\mu_j(z)$$

On peut utiliser l'expression du polynôme :

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\langle\eta|z\rangle}{\sqrt{\langle\eta|\eta\rangle\langle z|z\rangle}} h\left(\bar{z}\right) \mathrm{d}^2\mu_j(z) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \int_{\mathbb{C}} \frac{\langle\eta|z\rangle}{\sqrt{\langle\eta|\eta\rangle\langle z|z\rangle}} \frac{\mathcal{M}_k\left(\bar{z}\right)}{\left(1+|z|^2\right)^j} \mathrm{d}^2\mu_j(z)$$

Mais on reconnait l'expression de (2.8) :

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\langle\eta|z\rangle}{\sqrt{\langle\eta|\eta\rangle\langle z|z\rangle}} h\left(\bar{z}\right) \mathrm{d}^2\mu_j(z) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \mathcal{A}_k$$

Puis enfin en utilisant la relation (2.9) :

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\langle\eta|z\rangle}{\sqrt{\langle\eta|\eta\rangle\langle z|z\rangle}} h\left(\bar{z}\right) \mathrm{d}^2\mu_j(z) = \frac{1}{\left(1+|\eta|^2\right)^j} \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \mathcal{M}_k\left(\bar{\eta}\right) = \frac{\mathcal{P}_m\left(\bar{\eta}\right)}{\left(1+|\eta|^2\right)^j}$$

Finalement nous avons bel et bien montré que :

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\langle\eta|z\rangle}{\sqrt{\langle\eta|\eta\rangle\langle z|z\rangle}} h\left(\bar{z}\right) \mathrm{d}^2\mu_j(z) = h\left(\bar{\eta}\right)$$

Chapitre 3

Utilisation des états cohérents pour l'écriture intégrale

Nous savons que pour le cas usuel de l'application de l'intégrale de chemin, le propagateur s'écrit :

$$\langle q', t' | q, t\rangle = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}\right)^{\frac{n+1}{2}}\int \mathrm{d}q_1\cdots\mathrm{d}q_n \exp\left(\frac{i\varepsilon}{\hbar}\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{1}{2}m\dot{q}_k^2 - V(\bar{q}_k)\right\}\right)$$

Nous avions obtenu cela en insérant des relations de fermeture dans l'expression. Tentons la même approche. Nous cherchons maintenant $G(\bar{z}_2, z_1, \tau)$, l'amplitude de probabilité pour une état $|z_1\rangle$ au temps 0 d'aller à un état $|z_2\rangle$ à un instant τ (attention, ici les états cohérents sont choisis normés, ils correspondent à $|z\rangle := (1+|z|^2)^{-j} e^{z\hat{J}_+}|j,-j\rangle$). En considérant l'opérateur d'évolution, nous pouvons écrire que :

$$G(\bar{z}_2, z_1, \tau) = \langle z_2|\hat{\mathrm{U}}(0;\tau)\,|z_1\rangle$$

De la même manière que pour le cas usuel, nous subdivisons le temps en intervalles réguliers :

$$t_k := k\varepsilon, \quad k \in [\![0, N]\!], N \in \mathbb{N}$$

Nous avons la correspondance suivante :

$$\begin{aligned} |z_1\rangle &\equiv t_0 \\ |z_2\rangle &\equiv t_N = \tau \end{aligned}$$

Nous utilisons une propriété bien connue de l'opérateur d'évolution :

$$\hat{\mathrm{U}}(0;\tau) = \hat{\mathrm{U}}(t_0;t_N) = \hat{\mathrm{U}}(t_{N-1};t_N)\,\hat{\mathrm{U}}(t_{N-2};t_{N-1})\times\cdots\times\hat{\mathrm{U}}(t_1;t_2)\,\hat{\mathrm{U}}(t_0;t_1)$$

Nous pouvons encore insérer des relations de fermeture sur la base des états cohérents. Pour ce faire on fait correspondre à chaque instant t_k une variable d'intégration ξ_k, et on écrit :

$$\hat{\mathrm{U}}(0;\tau) = \int_{\mathbb{C}}\mathrm{d}^2\mu_j|\xi_N\rangle\langle\xi_N|\,\hat{\mathrm{U}}(t_{N-1};t_N)\int_{\mathbb{C}}\mathrm{d}^2\mu_j|\xi_{N-1}\rangle\langle\xi_{N-1}|\times\cdots\times\int_{\mathbb{C}}\mathrm{d}^2\mu_j|\xi_1\rangle\langle\xi_1|\,\hat{\mathrm{U}}(t_0;t_1)\int_{\mathbb{C}}\mathrm{d}^2\mu_j|\xi_0\rangle\langle\xi_0|$$

Alors :

$$G(\bar{z}_2, z_1, \tau) = \int_{\mathbb{C}^{N+1}}\prod_{k=0}^{N}\mathrm{d}^2\mu_j(\xi_k)\,\langle z_2|\xi_N\rangle\langle\xi_0|z_1\rangle\prod_{k=1}^{N}\langle\xi_k|\hat{\mathrm{U}}(t_{k-1};t_k)\,|\xi_{k-1}\rangle$$

Or nous savons que (avec la convention $\hbar = 1$) :

$$\hat{\mathrm{U}}(t_{k-1};t_k) = \hat{\mathrm{U}}(t_k - \varepsilon; t_k) \simeq e^{-i\varepsilon\hat{\mathrm{H}}(t_k)}$$

Si bien que :

$$G(\bar{z}_2, z_1, \tau) = \int_{\mathbb{C}^{N+1}} \prod_{k=0}^{N} \mathrm{d}^2\mu_j(\xi_k)\, \langle z_2|\xi_N\rangle\langle\xi_0|z_1\rangle \prod_{k=1}^{N} \langle\xi_k|e^{-i\varepsilon\hat{\mathrm{H}}(t_k)}|\xi_{k-1}\rangle$$

Or :

$$\langle\xi_k|e^{-i\varepsilon\hat{\mathrm{H}}(t_k)}|\xi_{k-1}\rangle \simeq \langle\xi_k|\hat{1} - i\varepsilon\hat{\mathrm{H}}(t_k)\,|\xi_{k-1}\rangle = \langle\xi_k|\xi_{k-1}\rangle\left(1 - i\varepsilon\frac{\langle\xi_k|\hat{\mathrm{H}}(t_k)\,|\xi_{k-1}\rangle}{\langle\xi_k|\xi_{k-1}\rangle}\right)$$

On pose alors :

$$H\big(\bar{\xi}_k, \xi_{k-1}; t_k\big) := \frac{\langle\xi_k|\hat{\mathrm{H}}(t_k)\,|\xi_{k-1}\rangle}{\langle\xi_k|\xi_{k-1}\rangle}$$

Si bien que l'on a, toujours au premier ordre en ε :

$$\langle\xi_k|e^{-i\varepsilon\hat{\mathrm{H}}(t_k)}|\xi_{k-1}\rangle \simeq \langle\xi_k|\xi_{k-1}\rangle\, e^{-i\varepsilon H\left(\bar{\xi}_k,\xi_{k-1};t_k\right)}$$

Alors le propagateur devient :

$$G(\bar{z}_2, z_1, \tau) = \int_{\mathbb{C}^{N+1}} \prod_{k=0}^{N} \mathrm{d}^2\mu_j(\xi_k)\, \langle z_2|\xi_N\rangle\langle\xi_0|z_1\rangle \prod_{k=1}^{N} \langle\xi_k|\xi_{k-1}\rangle\, e^{-i\varepsilon H\left(\bar{\xi}_k,\xi_{k-1};t_k\right)}$$

On se rappelle de la relation suivante, pour des vecteurs normés :

$$\int_{\mathbb{C}} \langle\eta|z\rangle\, h(\bar{z})\,\mathrm{d}^2\mu_j(z) = h(\bar{\eta})$$

Nous allons intégrer sur les valeurs de ξ_0 et ξ_N, et nous allons, pour la première intégration par exemple, avoir le calcul suivant a effectuer :

$$\int_{\mathbb{C}} \langle\xi_0|z_1\rangle\langle\xi_1|\xi_0\rangle\, e^{-i\varepsilon H\left(\bar{\xi}_1,\xi_0;t_1\right)}\mathrm{d}^2\mu_j(\xi_0) = \left\{\int_{\mathbb{C}} \langle z_1|\xi_0\rangle\langle\xi_0|\xi_1\rangle\, e^{i\varepsilon H\left(\xi_1,\bar{\xi}_0;t_1\right)}\mathrm{d}^2\mu_j(\xi_0)\right\}^{\star}$$

La conjugaison parait un peu extravaguante, mais c'est le moyen nécessaire pour l'application de la formule, alors :

$$\int_{\mathbb{C}} \langle\xi_0|z_1\rangle\langle\xi_1|\xi_0\rangle\, e^{-i\varepsilon H\left(\bar{\xi}_1,\xi_0;t_1\right)}\mathrm{d}^2\mu_j(\xi_0) = \left\{\langle z_1|\xi_1\rangle\, e^{i\varepsilon H(\xi_1,\bar{z}_1;t_1)}\right\}^{\star} = \langle\xi_1|z_1\rangle\, e^{-i\varepsilon H\left(\bar{\xi}_1,z_1;t_1\right)}$$

L'intégrale sur ξ_N ne nécessite pas la conjugaison complexe, tout est dans le bon sens :

$$\int_{\mathbb{C}} \langle z_2|\xi_N\rangle\langle\xi_N|\xi_{N-1}\rangle\, e^{-i\varepsilon H\left(\bar{\xi}_N,\xi_{N-1};t_N\right)}\mathrm{d}^2\mu_j(\xi_N) = \langle z_2|\xi_{N-1}\rangle\, e^{-i\varepsilon H(\bar{z}_2,\xi_{N-1};t_N)}$$

Alors, on renomme $z_1 = \xi_0$ et $z_2 = \xi_2$ (attention, les variables passent d'un statut de variable muettes à un statut de varibles libres !), nous pouvons finalement écrire, apès l'intégration :

$$G\big(\bar{\xi}_N, \xi_0, \tau\big) = \int_{\mathbb{C}^{N-1}} \prod_{k=1}^{N-1} \mathrm{d}^2\mu_j(\xi_k) \prod_{k=1}^{N} \langle\xi_k|\xi_{k-1}\rangle \times \exp\left(-i\varepsilon\sum_{k=1}^{N} H\big(\bar{\xi}_k, \xi_{k-1}; t_k\big)\right)$$

Nous nous occupons maintenant des termes $\langle \xi_k | \xi_{k-1} \rangle$. Pour cela considérons $\langle a|b\rangle$ avec $a - b = \delta$:

$$\langle a|b\rangle = \left(\frac{(1+\bar{a}b)^2}{(1+\bar{a}a)\left(1+\bar{b}b\right)} \right)^j$$

Que l'on écrit encore :

$$\langle a|b\rangle = \left(\frac{1+\bar{a}(a-\delta)}{1+\bar{a}a} \frac{1+\left(\bar{b}+\bar{\delta}\right)b}{1+\bar{b}b} \right)^j$$

Soit encore :

$$\langle a|b\rangle = \left(\left(1 - \frac{\delta\bar{a}}{1+\bar{a}a}\right)\left(1 + \frac{\bar{\delta}b}{1+\bar{b}b}\right) \right)^j$$

Nous pouvons faire un développement limité en δ de ces quantités :

$$\langle a|b\rangle = 1 + j\left(\frac{\bar{\delta}b}{1+\bar{b}b} - \frac{\delta\bar{a}}{1+\bar{a}a} \right) + o\left(\delta^2\right)$$

Toujours au premier ordre en δ nous pouvons réduire au même dénominateur de la façon suivante :

$$\langle a|b\rangle = 1 + j\frac{\bar{\delta}b - \delta\bar{a}}{1+\bar{a}b} + o\left(\delta^2\right)$$

Alors, en passant au logarithme :

$$\ln\left(\langle a|b\rangle\right) = j\frac{\bar{\delta}b - \delta\bar{a}}{1+\bar{a}b} + o\left(\delta^2\right)$$

Puis en posant $\delta_k := \xi_k - \xi_{k-1}$, on peut justifier que $\delta_k \sim \varepsilon$ à la limite N grand, il vient :

$$\ln\left(\langle \xi_k|\xi_{k-1}\rangle\right) \simeq j\frac{\bar{\delta}_k\xi_{k-1} - \delta_k\bar{\xi}_k}{1+\xi_k\bar{\xi}_{k-1}}$$

Nous voyons bien que la limite des grands N ne va pas concerner les variables ξ_0 et ξ_N qui sont les conditions aux limites du problème, traitant alors ces termes à part écrivons que :

$$G\left(\bar{\xi}_N, \xi_0, \tau\right) = \int_{\mathbb{C}^{N-1}} \prod_{k=1}^{N-1} \mathrm{d}^2\mu_j(\xi_k) \, \langle \xi_N|\xi_{N-1}\rangle \, \langle \xi_1|\xi_0\rangle \times \exp\left(j\sum_{k=2}^{N-1} \frac{\bar{\delta}_k\xi_{k-1} - \delta_k\bar{\xi}_k}{1+\xi_k\bar{\xi}_{k-1}} - i\varepsilon\sum_{k=1}^{N} H\left(\bar{\xi}_k, \xi_{k-1}; t_k\right) \right)$$

A la limite $\varepsilon \to 0$, nous avons le comportement suivant :

$$\frac{\delta_k}{\varepsilon} = \frac{\xi_k - \xi_{k-1}}{\varepsilon} \longrightarrow \dot{\xi}(t_k)$$

Si bien que :

$$\sum_{k=2}^{N-1} \frac{\bar{\delta}_k\xi_{k-1} - \delta_k\bar{\xi}_k}{1+\xi_k\bar{\xi}_{k-1}} = \sum_{k=2}^{N-1} \frac{\bar{\delta}_k/\varepsilon\xi_{k-1} - \delta_k/\varepsilon\bar{\xi}_k}{1+\xi_k\bar{\xi}_{k-1}}\varepsilon \longrightarrow \int_0^\tau \frac{\dot{\bar{\xi}}(t)\,\xi(t) - \dot{\xi}(t)\,\bar{\xi}(t)}{1+|\xi(t)\,|^2}\mathrm{d}t$$

De plus les termes hamiltoniens vont avoir des comportements du type :

$$\exp\left(-i\varepsilon\sum_{k=1}^{N} H\left(\bar{\xi}_k, \xi_{k-1}; t_k\right) \right) \longrightarrow \exp\left(-i\int_0^\tau H\left(\bar{\xi}(t)\,, \xi(t)\,; t\right) \mathrm{d}t \right)$$

Où :

$$H\big(\bar{\xi}(t_k)\,,\xi(t_k)\,;t\big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\langle\xi_k|\hat{\mathrm{H}}(t_k)\,|\xi_{k-1}\rangle}{\langle\xi_k|\xi_{k-1}\rangle} = \langle\xi(t_k)|\hat{\mathrm{H}}(t_k)\,|\xi(t_k)\rangle$$

Puis les termes qui dépassent (que l'on ajoutera dans l'exponentielle) et qui ne peuvent faire intervenir au passage à la limite des termes dérivés (ils sont au bout de la somme) :

$$\ln\left(\langle\xi_N|\xi_{N-1}\rangle\right) = j\ln\left(\frac{\left(1+\bar{\xi}_N\xi_{N-1}\right)^2}{\left(1+|\xi_N|^2\right)\left(1+|\xi_{N-1}|^2\right)}\right)$$

On admet, mais on considère ce résultat comme finalement assez louche (pour le terme Γ), que, lorsque l'on va passer à la limite N grand :

$$G\big(\bar{\xi}_\tau,\xi_0;\tau\big) = \int_{\xi(0)=\xi_0}^{\bar{\xi}(\tau)=\bar{\xi}_\tau}\mathcal{D}\mu_j(\xi)\exp\left(\Phi\right)$$

Où l'on a :

$$\Phi = L+\Gamma$$

Avec les expressions suivantes, pour L :

$$L = j\int_0^\tau\frac{\dot{\bar{\xi}}(t)\,\xi(t)-\bar{\xi}(t)\,\dot{\xi}(t)}{1+|\xi(t)\,|^2}\mathrm{d}t - i\int_0^\tau H\big(\bar{\xi}(t)\,,\xi(t)\,;t\big)\,\mathrm{d}t$$

Puis pour Γ :

$$\Gamma = j\ln\left(\frac{\left(1+\bar{\xi}_\tau\xi(\tau)\right)\left(1+\bar{\xi}(0)\,\xi_0\right)}{\left(1+|\xi_\tau|^2\right)\left(1+|\xi_0|^2\right)}\right)$$

3.1 Equation classique du mouvement pour le spin

Maintenant que nous avons une action Φ (à des $\hbar$ et des i près), nous pouvons déduire les "équations du mouvement" du principe variationnel. On remarque aussi que le terme j dans l'expression de L va jouer un rôle très important pour l'approximation semi-classique. En effet selon sa valeur on va pouvoir avoir une approximation plus ou moins bonne autour de la trajectoire "classique" (que l'on cherche à déterminer ici, en tout cas les équations). Il faut en effet que j soit grand pour pouvoir justifier l'approximation semi-classique.

Maintenant considérons que l'on ajoute aux trajectoires dites classiques $\xi_c(t)\,,\bar{\xi}_c(t)$ (qu'il faut considérer comme indépendantes) deux trajectoires infiniment petites $\delta\xi(t)\,,\delta\bar{\xi}(t)$. Ces trajectoires satisfont les conditions aux limites particulières à savoir $\delta\xi(0)=0,\delta\bar{\xi}(\tau)=0$. Alors (on omet maintenant la dépendance temporelle) :

$$\frac{1}{1+|\xi_c+\delta\xi|^2} = \frac{1}{1+|\xi_c|^2+\bar{\xi}_c\delta\xi+\xi_c\delta\bar{\xi}+o(|\delta\xi|^2)} = \frac{1}{1+|\xi_c|^2}\frac{1}{1+\frac{\bar{\xi}_c\delta\xi+\xi_c\delta\bar{\xi}+o(|\delta\xi|^2)}{1+|\xi_c|^2}}$$

On continue les approximations :

$$\frac{1}{1+|\xi_c+\delta\xi|^2} = \frac{1}{1+|\xi_c|^2}\left(1-\frac{\bar{\xi}_c\delta\xi+\xi_c\delta\bar{\xi}}{1+|\xi_c|^2}+o\left(|\delta\xi|^2\right)\right)$$

De plus :

$$\left(\dot{\bar{\xi}}_c + \delta\dot{\bar{\xi}}\right)(\xi_c + \delta\xi) - \left(\bar{\xi}_c + \delta\bar{\xi}\right)\left(\dot{\xi}_c + \delta\dot{\xi}\right) = \dot{\bar{\xi}}_c\xi_c - \bar{\xi}_c\dot{\xi}_c + \xi_c\delta\dot{\bar{\xi}} + \dot{\bar{\xi}}_c\delta\xi - \bar{\xi}_c\delta\dot{\xi} - \dot{\xi}_c\delta\bar{\xi} + o\left(|\delta\xi|^2\right)$$

Nous pouvons maintenant écrire la variation du terme suivant (la première intégrale dans l'expression de L) :

$$\delta T = \int_0^\tau \frac{1}{1+|\xi_c|^2}\left(\xi_c\delta\dot{\bar{\xi}} + \dot{\bar{\xi}}_c\delta\xi - \bar{\xi}_c\delta\dot{\xi} - \dot{\xi}_c\delta\bar{\xi} - \frac{\left(\dot{\bar{\xi}}_c\xi_c - \bar{\xi}_c\dot{\xi}_c\right)\left(\bar{\xi}_c\delta\xi + \xi_c\delta\bar{\xi}\right)}{1+|\xi_c|^2}\right)\mathrm{d}t$$

Nous écrivons, de cette dernière quantité, les seuls termes en $\delta\dot{\xi}$ et $\delta\dot{\bar{\xi}}$ que l'on intègre par parties :

$$\delta T_1 = \int_0^\tau \frac{\xi_c\delta\dot{\bar{\xi}} - \bar{\xi}_c\delta\dot{\xi}}{1+|\xi_c|^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{\xi_c\delta\bar{\xi} - \bar{\xi}_c\delta\xi}{1+|\xi_c|^2}\right]_0^\tau + \int_0^\tau\left(\delta\xi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\xi}_c}{1+|\xi_c|^2} - \delta\bar{\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\xi_c}{1+|\xi_c|^2}\right)\mathrm{d}t$$

Mais :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\xi}_c}{1+|\xi_c|^2} &= \frac{\dot{\bar{\xi}}_c}{1+|\xi_c|^2} - \frac{\bar{\xi}_c\left(\xi_c\dot{\bar{\xi}}_c + \dot{\xi}_c\bar{\xi}_c\right)}{\left(1+|\xi_c|^2\right)^2} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\xi_c}{1+|\xi_c|^2} &= \frac{\dot{\xi}_c}{1+|\xi_c|^2} - \frac{\xi_c\left(\bar{\xi}_c\dot{\xi}_c + \dot{\bar{\xi}}_c\xi_c\right)}{\left(1+|\xi_c|^2\right)^2}
\end{aligned}$$

Alors, dans l'expression de δT_1 :

$$\delta T_1 = \left[\frac{\xi_c\delta\bar{\xi} - \bar{\xi}_c\delta\xi}{1+|\xi_c|^2}\right]_0^\tau + \int_0^\tau\left(\frac{\dot{\bar{\xi}}_c\delta\xi - \dot{\xi}_c\delta\bar{\xi}}{1+|\xi_c|^2} + \frac{\left(\xi_c\delta\bar{\xi} - \bar{\xi}_c\delta\xi\right)\left(\xi_c\dot{\bar{\xi}}_c + \dot{\xi}_c\bar{\xi}_c\right)}{\left(1+|\xi_c|^2\right)^2}\right)\mathrm{d}t$$

En écrivant maintenant tous les termes de δT :

$$\delta T = \left[\frac{\xi_c\delta\bar{\xi} - \bar{\xi}_c\delta\xi}{1+|\xi_c|^2}\right]_0^\tau + \int_0^\tau\left(2\frac{\dot{\bar{\xi}}_c\delta\xi - \dot{\xi}_c\delta\bar{\xi}}{1+|\xi_c|^2} + \frac{\left(\bar{\xi}_c\dot{\xi}_c - \dot{\bar{\xi}}_c\xi_c\right)\left(\bar{\xi}_c\delta\xi + \xi_c\delta\bar{\xi}\right) + \left(\xi_c\delta\bar{\xi} - \bar{\xi}_c\delta\xi\right)\left(\xi_c\dot{\bar{\xi}}_c + \dot{\xi}_c\bar{\xi}_c\right)}{\left(1+|\xi_c|^2\right)^2}\right)\mathrm{d}t$$

On peut alors simplifier le gros numérateur :

$$\left(\bar{\xi}_c\dot{\xi}_c - \dot{\bar{\xi}}_c\xi_c\right)\left(\bar{\xi}_c\delta\xi + \xi_c\delta\bar{\xi}\right) + \left(\xi_c\delta\bar{\xi} - \bar{\xi}_c\delta\xi\right)\left(\xi_c\dot{\bar{\xi}}_c + \dot{\xi}_c\bar{\xi}_c\right) = 2\bar{\xi}_c\xi_c\left(\dot{\xi}_c\delta\bar{\xi} - \dot{\bar{\xi}}_c\delta\xi\right)$$

Tout comptes fait dans l'expression de δT :

$$\delta T = \left[\frac{\xi_c\delta\bar{\xi} - \bar{\xi}_c\delta\xi}{1+\bar{\xi}_c\xi_c}\right]_0^\tau + 2\int_0^\tau \frac{\dot{\bar{\xi}}_c\delta\xi - \dot{\xi}_c\delta\bar{\xi}}{1+\bar{\xi}_c\xi_c}\left(1 - \frac{\bar{\xi}_c\xi_c}{1+\bar{\xi}_c\xi_c}\right)\mathrm{d}t$$

Soit finalement pour cette quantité :

$$\delta T = \left[\frac{\xi_c\delta\bar{\xi} - \bar{\xi}_c\delta\xi}{1+\bar{\xi}_c\xi_c}\right]_0^\tau + 2\int_0^\tau \frac{\dot{\bar{\xi}}_c\delta\xi - \dot{\xi}_c\delta\bar{\xi}}{\left(1+\bar{\xi}_c\xi_c\right)^2}\mathrm{d}t$$

De plus nous avons (pour construire les termes complémentaires à δT dans δL), avec une notation rapide pour les dérivées partielles :

$$H\left(\bar{\xi}_c + \delta\bar{\xi}, \xi_c + \delta\xi; t\right) = H_c + \left(\partial_{\bar{\xi}} H\right)_c \delta\bar{\xi} + \left(\partial_{\xi} H\right)_c \delta\xi + o\left(|\delta\xi|^2\right)$$

Nous en déduisons finalement la variation de δL :

$$\delta L = j\delta T - i\int_0^{\tau} \left(\left(\partial_{\bar{\xi}} H\right)_c \delta\bar{\xi} + \left(\partial_{\xi} H\right)_c \delta\xi\right) \mathrm{d}t$$

Alors :

$$\delta L = j\left[\frac{\xi_c \delta\bar{\xi} - \bar{\xi}_c \delta\xi}{1 + \bar{\xi}_c \xi_c}\right]_0^{\tau} + \int_0^{\tau} \left\{\left(-i\left(\partial_{\xi} H\right)_c + \frac{2j\dot{\bar{\xi}}_c}{\left(1 + \bar{\xi}_c \xi_c\right)^2}\right)\delta\xi - \left(i\left(\partial_{\bar{\xi}} H\right)_c + \frac{2j\dot{\xi}_c}{\left(1 + \bar{\xi}_c \xi_c\right)^2}\right)\delta\bar{\xi}\right\} \mathrm{d}t$$

Cela établit, nous avons encore, toujours dans le but de calculer $\delta\Phi$, il nous reste à déterminer $\delta\Gamma$ (les quantités ξ_0 et $\bar{\xi}_\tau$ sont considérées comme constantes, mais que l'on fait varier afin de déterminer la variation fonctionnelle d'action en fonction des paramètres initiaux) :

$$\delta\Gamma = \frac{j\bar{\xi}_\tau \delta\xi(\tau)}{1 + \bar{\xi}_\tau \xi(\tau)} + \frac{j\xi_0 \delta\bar{\xi}(0)}{1 + \bar{\xi}(0)\,\xi_0} + \frac{j\xi(\tau)\,\delta\bar{\xi}_\tau}{1 + \bar{\xi}_\tau \xi(\tau)} + \frac{j\bar{\xi}(0)\,\delta\xi_0}{1 + \bar{\xi}(0)\,\xi_0}$$

Alors si on considère ces derniers termes ainsi que le terme tout intégré de δL :

$$\delta\Phi_{[\,]} = j\left[\frac{\xi_c \delta\bar{\xi} - \bar{\xi}_c \delta\xi}{1 + \bar{\xi}_c \xi_c}\right]_0^{\tau} + \frac{j\bar{\xi}_\tau \delta\xi(\tau)}{1 + \bar{\xi}_\tau \xi(\tau)} + \frac{j\xi_0 \delta\bar{\xi}(0)}{1 + \bar{\xi}(0)\,\xi_0} + \frac{j\xi(\tau)\,\delta\bar{\xi}_\tau}{1 + \bar{\xi}_\tau \xi(\tau)} + \frac{j\bar{\xi}(0)\,\delta\xi_0}{1 + \bar{\xi}(0)\,\xi_0}$$

On développe le terme non encore développé (en tenant en comptes les conditions aux limites déjà énoncées) :

$$\begin{aligned}\delta\Phi_{[\,]} = &-\frac{j\bar{\xi}_\tau \delta\xi_c(\tau)}{1 + \bar{\xi}_\tau \xi_c(\tau)} - \frac{j\xi_0 \delta\bar{\xi}_c(0)}{1 + \bar{\xi}_0 \xi_c(0)} + \frac{j\xi_c(\tau)\,\delta\bar{\xi}_\tau}{1 + \bar{\xi}_\tau \xi_c(\tau)} + \frac{j\bar{\xi}_c(0)\,\delta\xi_0}{1 + \bar{\xi}_c(0)\,\xi_0}\\ &+\frac{j\bar{\xi}_\tau \delta\xi_c(\tau)}{1 + \bar{\xi}_\tau \xi(\tau)} + \frac{j\xi_0 \delta\bar{\xi}_c(0)}{1 + \bar{\xi}(0)\,\xi_0} + \frac{j\xi_c(\tau)\,\delta\bar{\xi}_\tau}{1 + \bar{\xi}_\tau \xi_c(\tau)} + \frac{j\bar{\xi}_c(0)\,\delta\xi_0}{1 + \bar{\xi}_c(0)\,\xi_0}\end{aligned}$$

On simplifie un terme sur deux, les autres se doublent :

$$\delta\Phi_{[\,]} = \frac{2j\xi_c(\tau)}{1 + \bar{\xi}_\tau \xi_c(\tau)}\delta\bar{\xi}_\tau + \frac{2j\bar{\xi}_c(0)}{1 + \bar{\xi}_c(0)\,\xi_0}\delta\xi_0 \tag{3.1}$$

Comme ces termes sont les seules termes de bord de l'action totale nous en désuisons que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_c}{\partial\xi_0} &= \frac{2j\bar{\xi}_c(0)}{1 + \bar{\xi}_c(0)\,\xi_0}\\ \frac{\partial\Phi_c}{\partial\bar{\xi}_\tau} &= \frac{2j\xi_c(\tau)}{1 + \bar{\xi}_\tau \xi_c(\tau)}\end{aligned}$$

On peut en déduire la (et même les) dérivée seconde croisée de l'action en les variables "conditions initiales". Nous mettons de côté ce résultat qui ne sert pas imédiatement au calcul du propagateur mais qui sera utile plus loin :

$$\frac{\partial^2\Phi_c}{\partial\xi_0 \partial\bar{\xi}_\tau} = \frac{2j}{\left(1 + \bar{\xi}_\tau \xi_c(\tau)\right)^2}\frac{\partial\xi_c(\tau)}{\partial\xi_0} = \frac{2j}{\left(1 + \bar{\xi}_c(0)\,\xi_0\right)^2}\frac{\partial\bar{\xi}_c(0)}{\partial\bar{\xi}_\tau} \tag{3.2}$$

En revanche lorsqu'on applique les conditions initiales, la quantité (3.1) est bien entendue nulle : $\delta\Phi_{[]} = 0$, et on voit l'importance d'une part, des conditions aux limites particulières que nous avons prises (en supposant une indépendance entre la trajectoire et la trajectoire conjuguée), et d'autre part de la forme précise du terme Γ qui compense exactement le terme tout intégré de δL. Alors nous pouvons enfin donner la variation de l'action Φ :

$$\delta\Phi = \int_0^\tau \left\{ \left(-i \left(\partial_\xi H\right)_c + \frac{2j\dot{\bar{\xi}}_c}{\left(1+\bar{\xi}_c\xi_c\right)^2} \right) \delta\xi - \left(i \left(\partial_{\bar{\xi}} H\right)_c + \frac{2j\dot{\xi}_c}{\left(1+\bar{\xi}_c\xi_c\right)^2} \right) \delta\bar{\xi} \right\} \mathrm{d}t$$

Si nous appliquons le principe variationnel à cette expression, nous annulons l'intégrande en $\delta\xi$ et en $\delta\bar{\xi}$, nous obtenons deux équations indépendantes du premier ordre temps :

$$2j\dot{\xi} = -i\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2 \partial_{\bar{\xi}} H, \quad \xi(0) = \xi_0 \tag{3.3}$$

$$2j\dot{\bar{\xi}} = +i\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2 \partial_{\xi} H, \quad \bar{\xi}(\tau) = \bar{\xi}_\tau \tag{3.4}$$

3.2 Calculs pour l'approximation semi-classique

Nous cherchons désormais à écrire l'action au second ordre soit :

$$\Phi\left[\xi_c + \delta\xi, \bar{\xi}_c + \delta\bar{\xi}\right] = \Phi\left[\xi_c, \bar{\xi}_c\right] + \delta\Phi\left[\xi_c, \bar{\xi}_c\right] + \delta^2\Phi\left[\xi_c, \bar{\xi}_c\right]$$

On écrit $\Phi\left[\xi_c, \bar{\xi}_c\right] := \Phi_c$. Par application du principe variationnel $\delta\Phi\left[\xi_c, \bar{\xi}_c\right] = 0$, alors nous commençons les calculs (les dérivées sont prises le long du chemin "classique") :

$$\delta^2 E := \delta^2 \left(-i \int_0^\tau H \mathrm{d}t \right) = -i \int_0^\tau \left(\frac{1}{2} \left(\delta\xi\right)^2 \partial_\xi^2 H + \frac{1}{2} \left(\delta\bar{\xi}\right)^2 \partial_{\bar{\xi}}^2 H + \left(\delta\xi\delta\bar{\xi}\right) \partial_\xi \partial_{\bar{\xi}} H \right) \mathrm{d}t$$

Nous cherchons maintenant le terme :

$$\delta^2 T := \delta^2 \left(\int_0^\tau \frac{\dot{\bar{\xi}}\xi - \bar{\xi}\dot{\xi}}{1+\bar{\xi}\xi} \mathrm{d}t \right)$$

Un calcul frontal est une (très) mauvaise stratégie, nous posons alors :

$$F := \frac{\xi}{1+\bar{\xi}\xi}$$

$$\bar{F} := \frac{\bar{\xi}}{1+\bar{\xi}\xi}$$

La notation est traitresse car $\bar{\xi}$ et ξ sont indépendants (nous utiliserons tout de même la conjugaison formelle pour nous simplifier la vie). Nous décomposons alors $\delta^2 T$ en deux termes :

$$\delta^2 T = \delta^2 T_1 - \delta^2 T_2$$

Où :

$$\delta^2 T_1 := \delta^2 \left(\int_0^\tau \dot{\bar{\xi}} F \mathrm{d}t \right)$$

$$\delta^2 T_2 := \delta^2 \left(\int_0^\tau \dot{\xi} \bar{F} \mathrm{d}t \right)$$

Nous pouvons ne calculer que $\delta^2 T_1$, et pour obtenir $\delta^2 T_2$, nous n'aurrons qu'à utiliser la conjugaison formelle de la manière suivante :

$$\delta^2 T_1 = \overline{\delta^2 T_2} \Longrightarrow \delta^2 T \equiv 2i\Im\left(\delta^2 T_1\right)$$

Mais les termes qui nous intéressent vons être ceux du second ordre dans l'expression de l'intégrale complète :

$$\int_0^\tau \left(\dot{\bar{\xi}} + \delta\dot{\bar{\xi}}\right)\left(F + \delta F + \delta^2 F\right)\mathrm{d}t \longrightarrow \delta^2 T_1 = \int_0^\tau \delta\dot{\bar{\xi}}\delta F\mathrm{d}t + \int_0^\tau \dot{\bar{\xi}}\delta^2 F\mathrm{d}t$$

Or :

$$\begin{aligned}
\delta F &= \delta\xi\partial_\xi F + \delta\bar{\xi}\partial_{\bar{\xi}} F \\
\delta^2 F &= \frac{1}{2}\left(\delta\xi\right)^2\partial_\xi^2 F + \frac{1}{2}\left(\delta\bar{\xi}\right)^2\partial_{\bar{\xi}}^2 F + \delta\xi\delta\bar{\xi}\partial_\xi\partial_{\bar{\xi}} F
\end{aligned}$$

Nous avons les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
\partial_\xi F &= \frac{1}{\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2} \\
\partial_{\bar{\xi}} F &= -\frac{\xi^2}{\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2} \\
\partial_\xi\partial_{\bar{\xi}} F &= -\frac{2\xi}{\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^3} \\
\partial_\xi^2 F &= -\frac{2\bar{\xi}}{\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^3} \\
\partial_{\bar{\xi}}^2 F &= \frac{2\xi^2}{\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^3}
\end{aligned}$$

Ecrivons alors le terme de $\delta^2 T_1$ que ne contient que $\delta\dot{\bar{\xi}}$:

$$\delta^2 T_{11} := \int_0^\tau \delta\dot{\bar{\xi}}\delta F\mathrm{d}t = \int_0^\tau \delta\dot{\bar{\xi}}\left(\delta\xi\partial_\xi F + \delta\bar{\xi}\partial_{\bar{\xi}} F\right)\mathrm{d}t$$

Or :

$$\delta\bar{\xi}\delta\dot{\bar{\xi}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta\bar{\xi}\right)^2$$

On remet ces expressions dans celle de δT_{11} :

$$\delta^2 T_{11} = \int_0^\tau \delta\dot{\bar{\xi}}\delta\xi\partial_\xi F\mathrm{d}t + \int_0^\tau \delta\dot{\bar{\xi}}\delta\bar{\xi}\partial_{\bar{\xi}} F\mathrm{d}t = \int_0^\tau \delta\dot{\bar{\xi}}\delta\xi\partial_\xi F\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta\bar{\xi}\right)^2\partial_{\bar{\xi}} F\mathrm{d}t$$

On intègre par parties la seconde intégrale

$$\delta^2 T_{11} = \int_0^\tau \delta\dot{\bar{\xi}}\delta\xi\partial_\xi F\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\left[\left(\delta\bar{\xi}\right)^2\partial_{\bar{\xi}} F\right]_0^\tau - \frac{1}{2}\int_0^\tau \left(\delta\bar{\xi}\right)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\partial_{\bar{\xi}} F\right)\mathrm{d}t$$

Or :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\partial_{\bar{\xi}} F\right) = \dot{\xi}\partial_{\bar{\xi}}\partial_\xi F + \dot{\bar{\xi}}\partial_{\bar{\xi}}^2 F$$

Et le terme tout intégré produit dans l'expression de $\delta^2 T_{11}$ (on prendra grand soin lorsque l'on reconstruira $\delta^2 T$, la conjugaison formelle fait correspondre $t=0$ à $t=\tau$ ainsi qu'un signe $-$ supplémentaire, puisqu'en effet le terme viendra de l'autre partie de la variation aux bords) :

$$\delta^2 T_{11} = \int_0^\tau \delta\dot{\bar{\xi}}\delta\xi\partial_\xi F \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\left(\delta\bar{\xi}(0)\right)^2 \partial_{\bar{\xi}} F(0) - \frac{1}{2}\int_0^\tau \left(\delta\bar{\xi}\right)^2 \left(\dot{\xi}\partial_{\bar{\xi}}\partial_\xi F + \dot{\bar{\xi}}\partial_{\bar{\xi}}^2 F\right) \mathrm{d}t$$

Résumons les résultats jusque-là établis (le terme en $\left(\delta\bar{\xi}\right)^2 \dot{\bar{\xi}}\partial_{\bar{\xi}}^2 F$ se simplifie) :

$$\delta^2 T_1 = \int_0^\tau \delta\dot{\bar{\xi}}\delta\xi\partial_\xi F \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\left(\delta\bar{\xi}(0)\right)^2 \partial_{\bar{\xi}} F(0) + \frac{1}{2}\int_0^\tau \left((\delta\xi)^2 \dot{\bar{\xi}}\partial_\xi^2 F + 2\dot{\bar{\xi}}\delta\xi\delta\bar{\xi}\partial_\xi\partial_{\bar{\xi}} F - \left(\delta\bar{\xi}\right)^2 \dot{\xi}\partial_{\bar{\xi}}\partial_\xi F\right) \mathrm{d}t$$

Posons (pour la grande intégrale) :

$$\delta^2 T_{12} := \frac{1}{2}\int_0^\tau \left((\delta\xi)^2 \dot{\bar{\xi}}\partial_\xi^2 F - \left(\delta\bar{\xi}\right)^2 \dot{\xi}\partial_{\bar{\xi}}\partial_\xi F + 2\dot{\bar{\xi}}\delta\xi\delta\bar{\xi}\partial_\xi\partial_{\bar{\xi}} F\right) \mathrm{d}t$$

Regardons les termes en F dans cette intégrale. D'abord pour $(\delta\xi)^2$:

$$\dot{\bar{\xi}}\partial_\xi^2 F = -\frac{2\dot{\bar{\xi}}\bar{\xi}}{\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^3}$$

Puis les termes en $\left(\delta\bar{\xi}\right)^2$:

$$-\dot{\xi}\partial_{\bar{\xi}}\partial_\xi F = \frac{2\dot{\xi}\xi}{\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^3}$$

Puis pour le terme croisé $\delta\xi\delta\bar{\xi}$:

$$2\dot{\bar{\xi}}\partial_\xi\partial_{\bar{\xi}} F = -\frac{4\dot{\bar{\xi}}\xi}{\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^3}$$

Alors :

$$\delta^2 T_1 = \int_0^\tau \delta\dot{\bar{\xi}}\delta\xi\partial_\xi F \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\left(\delta\bar{\xi}(0)\right)^2 \partial_{\bar{\xi}} F(0) + \int_0^\tau \frac{-\dot{\bar{\xi}}\bar{\xi}\left(\delta\xi\right)^2 + \dot{\xi}\xi\left(\delta\bar{\xi}\right)^2 - 2\dot{\bar{\xi}}\xi\delta\xi\delta\bar{\xi}}{\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^3}\mathrm{d}t$$

Utilisons alors les équations classiques (3.3) et (3.4) pour remplacer les dérivées temporelles de la dernière intégrale :

$$\delta^2 T_1 = \int_0^\tau \delta\dot{\bar{\xi}}\delta\xi\partial_\xi F \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\left(\delta\bar{\xi}(0)\right)^2 \partial_{\bar{\xi}} F(0) - \frac{i}{2j}\int_0^\tau \frac{\bar{\xi}\partial_\xi H\left(\delta\xi\right)^2 + \xi\partial_{\bar{\xi}} H\left(\delta\bar{\xi}\right)^2 + 2\xi\partial_\xi H\delta\xi\delta\bar{\xi}}{1+\bar{\xi}\xi}\mathrm{d}t$$

Laissons temporairement de côté le termes du type $\delta^2 T$ pour maintenant regarder le termes provenant de Γ. Ce terme ce compose de deux termes, l'un correspondant à $t=0$, l'autre à $t=\tau$. Le terme à $t=0$ produit le terme suivant :

$$\delta^2 \Gamma_1 := \delta^2\left(j\ln\left(\frac{1+\bar{\xi}(0)\,\xi_0}{1+|\xi_0|^2}\right)\right) = -\frac{1}{2}\frac{\xi_0^2}{\left(1+\xi_0\bar{\xi}\,(0)\right)^2}\left(\delta\bar{\xi}\,(0)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\delta\bar{\xi}(0)\right)^2 \partial_{\bar{\xi}} F(0)$$

Ce terme compense exactement le terme de bord de l'expression de $\delta^2 T_1$ (et avec la précaution sur le signe du terme de bord qui apparaitra dans $\delta^2 T_2$, l'autre terme $\delta^2\Gamma$ compensera aussi le terme de bord). Nous pouvons alors écrire le terme suivant, à partir duquel on obtiendra par la conjuguaison formelle (déjà discutée) les termes de $\delta^2\Phi$ hormis le termes hamiltoniens $\delta^2 E$ traités en tout début de section :

$$\delta^2\Gamma_1 + j\delta^2 T_1 = j\int_0^\tau \delta\dot{\bar{\xi}}\delta\xi\partial_\xi F \mathrm{d}t - \frac{i}{2}\int_0^\tau \frac{\bar{\xi}\partial_\xi H\,(\delta\xi)^2 + \xi\partial_{\bar{\xi}}H\,\left(\delta\bar{\xi}\right)^2 + 2\xi\partial_\xi H\delta\xi\delta\bar{\xi}}{1+\bar{\xi}\xi}\mathrm{d}t$$

Enfin, grâce à la conjugaison formelle nous obtenons le terme complet $\delta^2\Gamma + j\delta^2 T$:

$$\delta^2\Gamma + j\delta^2 T = j\int_0^\tau \left(\delta\dot{\bar{\xi}}\delta\xi\partial_\xi F - \delta\dot{\xi}\delta\bar{\xi}\partial_{\bar{\xi}}\bar{F}\right)\mathrm{d}t - i\int_0^\tau \frac{\bar{\xi}\partial_\xi H\,(\delta\xi)^2 + \xi\partial_{\bar{\xi}}H\,\left(\delta\bar{\xi}\right)^2 + \left(\xi\partial_\xi H + \bar{\xi}\partial_{\bar{\xi}}H\right)\delta\xi\delta\bar{\xi}}{1+\bar{\xi}\xi}\mathrm{d}t$$

Dans la première intégrale nous remplaçons $\partial_\xi F$ et $\partial_{\bar{\xi}}\bar{F}$ par leur expression :

$$\delta^2\Gamma + j\delta^2 T = j\int_0^\tau \frac{\delta\dot{\bar{\xi}}\delta\xi - \delta\dot{\xi}\delta\bar{\xi}}{\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2}\mathrm{d}t - i\int_0^\tau \frac{\bar{\xi}\partial_\xi H\,(\delta\xi)^2 + \xi\partial_{\bar{\xi}}H\,\left(\delta\bar{\xi}\right)^2 + \left(\xi\partial_\xi H + \bar{\xi}\partial_{\bar{\xi}}H\right)\delta\xi\delta\bar{\xi}}{1+\bar{\xi}\xi}\mathrm{d}t$$

De cette dernière expression considérons les seuls termes faisant intervenir le hamiltonien et auxquels on ajoute les termes de $\delta^2 E$:

$$\delta^2 E' := -\frac{i}{2}\int_0^\tau \left[\left(\frac{2\bar{\xi}\partial_\xi H}{1+\bar{\xi}\xi} + \partial_\xi^2 H\right)(\delta\xi)^2 + \left(\frac{2\xi\partial_{\bar{\xi}}H}{1+\bar{\xi}\xi} + \partial_{\bar{\xi}}^2 H\right)\left(\delta\bar{\xi}\right)^2 + \left(\frac{2\left(\xi\partial_\xi H + \bar{\xi}\partial_{\bar{\xi}}H\right)}{1+\bar{\xi}\xi} + 2\partial_\xi\partial_{\bar{\xi}}H\right)\delta\xi\delta\bar{\xi}\right]\mathrm{d}t$$

Or :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_\xi[\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2\partial_\xi H]}{\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2} &= \frac{2\bar{\xi}\partial_\xi H}{1+\bar{\xi}\xi} + \partial_\xi^2 H \\
\frac{\partial_{\bar{\xi}}[\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2\partial_{\bar{\xi}} H]}{\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2} &= \frac{2\xi\partial_{\bar{\xi}} H}{1+\bar{\xi}\xi} + \partial_{\bar{\xi}}^2 H \\
\frac{\partial_\xi[\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2\partial_{\bar{\xi}} H] + \partial_{\bar{\xi}}[\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2\partial_\xi H]}{\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2} &= \frac{2\left(\xi\partial_\xi H + \bar{\xi}\partial_{\bar{\xi}}H\right)}{1+\bar{\xi}\xi} + 2\partial_\xi\partial_{\bar{\xi}}H
\end{aligned}$$

Alors, on peut écrire que :

$$\delta^2 E' = -\frac{i}{2}\int_0^\tau \frac{(\delta\xi)^2\partial_\xi[\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2\partial_\xi H] + \left(\delta\bar{\xi}\right)^2\partial_{\bar{\xi}}[\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2\partial_{\bar{\xi}}H] + \delta\xi\delta\bar{\xi}\left(\partial_\xi[\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2\partial_{\bar{\xi}}H] + \partial_{\bar{\xi}}[\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2\partial_\xi H]\right)}{\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2}\mathrm{d}t$$

L'expression de $\delta^2\Phi$ est alors :

$$\begin{aligned}
&\delta^2\Phi = j\int_0^\tau \frac{\delta\dot{\bar{\xi}}\delta\xi - \delta\dot{\xi}\delta\bar{\xi}}{\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2}\mathrm{d}t \qquad (3.5)\\
&-\frac{i}{2}\int_0^\tau \frac{(\delta\xi)^2\partial_\xi[\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2\partial_\xi H] + \left(\delta\bar{\xi}\right)^2\partial_{\bar{\xi}}[\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2\partial_{\bar{\xi}}H] + \delta\xi\delta\bar{\xi}\left(\partial_\xi[\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2\partial_{\bar{\xi}}H] + \partial_{\bar{\xi}}[\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2\partial_\xi H]\right)}{\left(1+\bar{\xi}\xi\right)^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Cette dernière expression établie, nous changeons maintenant de variables en posant :

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_c + \left(1 + \bar{\xi}_c \xi_c\right) \eta \\ \bar{\xi} &= \bar{\xi}_c + \left(1 + \bar{\xi}_c \xi_c\right) \bar{\eta} \end{aligned}$$

Que l'on écrit encore :

$$\eta = \frac{\delta \xi}{1 + \bar{\xi}_c \xi_c} \tag{3.6}$$

$$\bar{\eta} = \frac{\delta \bar{\xi}}{1 + \bar{\xi}_c \xi_c} \tag{3.7}$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \eta(0) &= 0 \\ \bar{\eta}(\tau) &= 0 \end{aligned}$$

Nous effectuons alors le changement de variable dans la seconde intégrale de (3.6) qui devient :

$$-ij \int_0^\tau \left(\mathrm{A}\eta^2 + 2\mathrm{B}\bar{\eta}\eta + \mathrm{C}\bar{\eta}^2\right) \mathrm{d}t$$

Où l'on a posé :

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \frac{1}{2j} \left\{ \partial_\xi [\left(1 + \bar{\xi}\xi\right)^2 \partial_\xi H] \right\}_c \\ \mathrm{C} &= \frac{1}{2j} \left\{ \partial_{\bar{\xi}} [\left(1 + \bar{\xi}\xi\right)^2 \partial_{\bar{\xi}} H] \right\}_c \\ \mathrm{B} &= \frac{1}{4j} \left\{ \partial_\xi [\left(1 + \bar{\xi}\xi\right)^2 \partial_{\bar{\xi}} H] + \partial_{\bar{\xi}} [\left(1 + \bar{\xi}\xi\right)^2 \partial_\xi H] \right\}_c \end{aligned}$$

Et pour la première intégrale de (3.6), qui fait intervenir des dérivées temporelles, on s'occupe de calculer $\delta\dot{\xi}$ et $\delta\dot{\bar{\xi}}$:

$$\begin{aligned} \delta\dot{\xi} &= \partial_t \left[(1 + \bar{\xi}_c \xi_c) \eta \right] = \left(\dot{\bar{\xi}}_c \xi_c + \bar{\xi}_c \dot{\xi}_c \right) \eta + (1 + \bar{\xi}_c \xi_c) \dot{\eta} \\ \delta\dot{\bar{\xi}} &= \partial_t \left[(1 + \bar{\xi}_c \xi_c) \bar{\eta} \right] = \left(\dot{\bar{\xi}}_c \xi_c + \bar{\xi}_c \dot{\xi}_c \right) \bar{\eta} + (1 + \bar{\xi}_c \xi_c) \dot{\bar{\eta}} \end{aligned}$$

Alors on calcule l'intégrande complet de la première intégrale de (3.6) :

$$\frac{\delta\dot{\bar{\xi}}\delta\xi - \delta\dot{\xi}\delta\bar{\xi}}{\left(1 + \bar{\xi}\xi\right)^2} = \frac{\delta\dot{\bar{\xi}}\eta - \delta\dot{\xi}\bar{\eta}}{1 + \bar{\xi}\xi} = \frac{\left(\dot{\bar{\xi}}_c \xi_c + \bar{\xi}_c \dot{\xi}_c \right) \bar{\eta}\eta + (1 + \bar{\xi}_c \xi_c) \dot{\bar{\eta}}\eta - \left(\dot{\bar{\xi}}_c \xi_c + \bar{\xi}_c \dot{\xi}_c \right) \eta\bar{\eta} - (1 + \bar{\xi}_c \xi_c) \dot{\eta}\bar{\eta}}{1 + \bar{\xi}\xi}$$

On simplifie :

$$\frac{\delta\dot{\bar{\xi}}\delta\xi - \delta\dot{\xi}\delta\bar{\xi}}{\left(1 + \bar{\xi}\xi\right)^2} = \dot{\bar{\eta}}\eta - \dot{\eta}\bar{\eta}$$

Si bien que l'on peut écrire le premier terme non nul de la variation de l'action (attention aux facteur en j) :

$$\delta^2\Phi\left[\eta, \bar{\eta}\right] = \int_0^\tau \left(\dot{\bar{\eta}}\eta - \dot{\eta}\bar{\eta}\right) \mathrm{d}t - i \int_0^\tau \left(\mathrm{A}\eta^2 + 2\mathrm{B}\bar{\eta}\eta + \mathrm{C}\bar{\eta}^2\right) \mathrm{d}t$$

Dans l'intégrale fonctionnelle donnant le propagateur $G\big(\bar{\xi}_\tau, \xi_0; \tau\big)$, l'élément d'intégration devient :

$$\mathcal{D}\mu_j(\xi) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N-1} \mathrm{d}^2\mu_j(\xi_k) \longrightarrow \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N-1} \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\bar{\eta} := \mathcal{D}\eta\mathcal{D}\bar{\eta}$$

Il y a un terme $(2j+1)/\pi$ qui est omit ici et dans l'article, sûrement lorsque l'auteur de l'article dit qu'il "normalise par le propagateur lorsque $\hat{\mathrm{H}} = 0$". Nous pouvons alors exprimer le propagateur comme :

$$G\big(\bar{\xi}_\tau, \xi_0; \tau\big) = \exp\left(\Phi_c\right) \int_{\eta(0)=0}^{\bar{\eta}(\tau)=0} \mathcal{D}\eta\mathcal{D}\bar{\eta} \exp\left(j\delta^2\Phi\left[\eta, \bar{\eta}\right]\right)$$

On introduit alors le propagateur réduit G_{red} :

$$G_{\text{red}} = \int_{\eta(0)=0}^{\bar{\eta}(\tau)=0} \mathcal{D}\eta\mathcal{D}\bar{\eta} \exp\left(j\delta^2\Phi\left[\eta, \bar{\eta}\right]\right)$$

Si bien que la propagateur se factorise sous la simple forme suivante :

$$G\big(\bar{\xi}_\tau, \xi_0; \tau\big) = \exp\left(\Phi_c\right) G_{\text{red}}$$

Comme on peut le faire lors des cas plus "classiques" que le moment cinétique, on peut considérer un nouveau système ayant pour variables dynamiques η et $\bar{\eta}$ avec l'action $\delta^2\Phi$. Nous pouvons alors associer à ce système un lagrangien $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} := \dot{\bar{\eta}}\eta - \dot{\eta}\bar{\eta} - i\mathrm{A}\eta^2 - 2i\mathrm{B}\bar{\eta}\eta - i\mathrm{C}\bar{\eta}^2 \tag{3.8}$$

Ce nouveau système dynamique vérifie aussi les équations de Lagrange, à savoir :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\eta}}} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\eta}} \end{aligned}$$

Avec le lagrangien explicite on obtient les équations dynamiques pour η et $\bar{\eta}$, qui sont :

$$\begin{aligned} -\dot{\bar{\eta}} &= \dot{\bar{\eta}} - 2i\mathrm{A}\eta - 2i\mathrm{B}\bar{\eta} \\ \dot{\eta} &= -\dot{\eta} - 2i\mathrm{B}\eta - 2i\mathrm{C}\bar{\eta} \end{aligned}$$

On simplifie alors par une facteur 2, puis on réarrange les termes. On peut alors écrire les équations dite de Jacobi :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\eta}} &= i\left(\mathrm{A}\eta + \mathrm{B}\bar{\eta}\right) \\ \dot{\eta} &= -i\left(\mathrm{C}\bar{\eta} + \mathrm{B}\eta\right) \end{aligned}$$

Posons alors, pour $0 \le t \le \tau$:

$$\eta = \eta' \exp\left(-i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right) \tag{3.9}$$

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}' \exp\left(i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right) \tag{3.10}$$

Alors dans les équations dynamiques :

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\eta}}' \exp\left(i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right) + i\mathrm{B}\bar{\eta} &= i\left(\mathrm{A}\eta' \exp\left(-i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right) + \mathrm{B}\bar{\eta}\right) \\
\dot{\eta}' \exp\left(-i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right) - i\mathrm{B}\eta &= -i\left(\mathrm{C}\bar{\eta}' \exp\left(i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right) + \mathrm{B}\eta\right)
\end{aligned}$$

On simplifie :

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\eta}}' &= i\mathrm{A}\eta' \exp\left(-2i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right) \\
\dot{\eta}' &= -i\mathrm{C}\bar{\eta}' \exp\left(2i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right)
\end{aligned}$$

On pose alors :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{A}} &= \mathrm{A}\exp\left(-2i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right) \\
\widetilde{\mathrm{C}} &= \mathrm{C}\exp\left(2i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right)
\end{aligned}$$

Si bien que l'on trouve le système d'équations dynamiques réduites à :

$$\begin{aligned}
-i\widetilde{\mathrm{A}}\eta' + \dot{\bar{\eta}}' &= 0 \\
-i\widetilde{\mathrm{C}}\bar{\eta}' - \dot{\eta}' &= 0
\end{aligned}$$

On peut encore l'écrire sous une forme opératorielle, en posant et en écrivant la dépendance en temps t :

$$\mathrm{Y}' = \begin{pmatrix} \eta' \\ \bar{\eta}' \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\mathrm{K}} = \begin{pmatrix} -i\widetilde{\mathrm{A}}\,(t) & \partial_t \\ -\partial_t & -i\widetilde{\mathrm{C}}\,(t) \end{pmatrix}$$

On signal au passage que l'opérateur $\widetilde{\mathrm{K}}$ ainsi définit est une objet mathématique complexe ayant à la fois des indices de matrice et des indices continus, nous ferons alors attention lorsque nous écrirons relations sur cet opérateur. Grâce à cet opérateur les équations de Jacobi se réduisent à :

$$\widetilde{\mathrm{K}}\mathrm{Y}' = 0 \tag{3.11}$$

Cette relation est vérifiée lorsque les variables dynémiques $\eta, \bar{\eta}$ vérifient les équations dynamiques. Sinon, on peut calculer des grandeurs commes :

$$\mathrm{Y}'^t\widetilde{\mathrm{K}}\mathrm{Y}' = \begin{pmatrix} \eta' & \bar{\eta}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\widetilde{\mathrm{A}}\,(t) & \partial_t \\ -\partial_t & -i\widetilde{\mathrm{C}}\,(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta' \\ \bar{\eta}' \end{pmatrix} = \dot{\bar{\eta}}'\eta' - \dot{\eta}'\bar{\eta}' - i\left(\widetilde{\mathrm{A}}\eta'^2 + \widetilde{\mathrm{C}}\bar{\eta}'^2\right)$$

Il se trouve que cette quantité est précisément le lagrangien $\mathcal{L}$ de l'équation (3.9) et pour le vérifier calculons alors :

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} &= \dot{\eta}' \exp\left(-i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right) - i\mathrm{B}\eta' \exp\left(-i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right) \\
\dot{\bar{\eta}} &= \dot{\bar{\eta}}' \exp\left(i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right) + i\mathrm{B}\bar{\eta}' \exp\left(i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right)
\end{aligned}$$

Alors un prenant l'expression de $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \dot{\bar{\eta}}'\eta' + i\mathrm{B}\bar{\eta}'\eta' - \dot{\eta}'\bar{\eta}' + i\mathrm{B}\eta'\bar{\eta}' - i\mathrm{A}\exp\left(-2i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right)\eta'^2 - 2i\mathrm{B}\bar{\eta}'\eta' - i\mathrm{C}\exp\left(i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right)\bar{\eta}'^2$$

Les termes croisés se simplifient et l'on reconnait les termes $\widetilde{\mathrm{A}}$ et $\widetilde{\mathrm{C}}$, et au final on trouve le résultat prédit :

$$\mathcal{L} = \dot{\bar{\eta}}'\eta' - \dot{\eta}'\bar{\eta}' - i\widetilde{\mathrm{A}}\eta'^2 - i\widetilde{\mathrm{C}}\bar{\eta}'^2 = \mathrm{Y}'^t\widetilde{\mathrm{K}}\mathrm{Y}'$$

Posons alors :

$$\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} \eta \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} e^{-i\int_0^\tau \mathrm{B}\mathrm{d}s} & 0 \\ 0 & e^{i\int_0^\tau \mathrm{B}\mathrm{d}s} \end{pmatrix}$$

Où $\widetilde{\mathrm{R}}$ n'est autre qu'une matrice de rotation, de déterminant 1, et de sorte que $\mathrm{Y}' = \widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{Y}$. On a ainsi, pour le lagrangien :

$$\mathcal{L} = \mathrm{Y}'^t\widetilde{\mathrm{K}}\mathrm{Y}' = \mathrm{Y}^t\widetilde{\mathrm{R}}^t\widetilde{\mathrm{K}}\widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{Y}$$

Nous pouvons donc écrire le propagateur réduit comme :

$$G_{\mathrm{red}} = \int_{\eta(0)=0}^{\bar{\eta}(\tau)=0} \mathcal{D}\eta\mathcal{D}\bar{\eta}\exp\left(j\int_0^\tau \mathcal{L}\mathrm{d}t\right) = \int_{\eta(0)=0}^{\bar{\eta}(\tau)=0} \mathcal{D}\eta\mathcal{D}\bar{\eta}\exp\left(j\int_0^\tau \mathrm{Y}^t\widetilde{\mathrm{R}}^t\widetilde{\mathrm{K}}\widetilde{\mathrm{R}}\mathrm{Y}\mathrm{d}t\right) \propto \frac{1}{\sqrt{\det\left(\widetilde{\mathrm{R}}^t\widetilde{\mathrm{K}}\widetilde{\mathrm{R}}\right)}}$$

Ce résultat nous étant connu grâce à la démarche de Gelfand et Yaglom. On peut enlever les déterminants de $\widetilde{\mathrm{R}}$ et $\widetilde{\mathrm{R}}^t$ qui valent 1. En sachant que le propagateur est normalisé (dans l'article de Kochetov) on a finalement :

$$G_{\mathrm{red}} = \sqrt{\frac{\det\left(\widetilde{\mathrm{K}}\right)}{\det\left(\widetilde{\mathrm{K}}_0\right)}}^{\,-1}, \qquad \widetilde{\mathrm{K}}_0 = \widetilde{\mathrm{K}}|_{\mathrm{A=C=0}} \tag{3.12}$$

Il nous faut alors calculer ces déterminants.

Pour ce faire posons :

$$f(\lambda) = \det\left(\widetilde{\mathrm{K}}_0^{-1}\left(\widetilde{\mathrm{K}} - \lambda\right)\right) = \det\left(\widetilde{\mathrm{K}}_0\right)^{-1}\det\left(\widetilde{\mathrm{K}} - \lambda\right)$$

Nous voyons immédiatement que $\sqrt{f(0)}$ est le propagateur réduit. Nous contournons le problème pour mieux le résoudre. Remémorons-nous la propriété suivante, pour un opérateur M diagonalisable et sous reserve d'existence de $\ln(\mathrm{M})$:

$$\ln(\det(\mathrm{M})) = \mathrm{tr}(\ln(\mathrm{M})) \tag{3.13}$$

En effet, si $\mathrm{M}^\star = \mathrm{diag}(m_1, \cdots, m_j, \cdots)$ est l'expression de l'opérateur dans une base où il est diagonal, comme la trace et le déterminant ne sont pas affectés par un changement de base :

$$\det(\mathrm{M}) = \exp(\ln(\det(\mathrm{M}))) = \exp(\ln(\det(\mathrm{M}^\star))) = \exp\left[\ln\left(\prod_j m_j\right)\right] = \exp\left[\sum_j \ln(m_j)\right]$$

On reconnait $\mathrm{tr}(\ln(\mathrm{M}^\star))$ qui est égale, on l'a dit, à $\mathrm{tr}(\ln(\mathrm{M}))$ si bien que :

$$\det(\mathrm{M}) = \exp(\mathrm{tr}(\ln(\mathrm{M})))$$

On passe au logarithme pour finalement retrouver l'expression (3.14) cherchée. Cela dit, il est évident que :

$$\ln\left(f\left(\lambda\right)\right) = \ln\left(\det\left(\widetilde{\mathrm{K}}_0\right)^{-1}\right) + \mathrm{tr}\left(\ln\left(\widetilde{\mathrm{K}} - \lambda\right)\right)$$

Le premier terme ne dépend pas de λ, si bien que :

$$\partial_\lambda \ln\left(f\left(\lambda\right)\right) = -\mathrm{tr}\left(\frac{1}{\widetilde{\mathrm{K}} - \lambda}\right) \tag{3.14}$$

Il apparait donc la trace de la fonction de Green (ou résolvante).

Définissons maintenant :

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{\mathrm{K}} - \lambda\right)\Xi &= 0, \qquad \text{avec} : \Xi = \begin{pmatrix} \phi \\ \overline{\phi} \end{pmatrix}, \quad \phi\left(0\right) = 0 \\ \left(\widetilde{\mathrm{K}} - \lambda\right)\Psi &= 0, \qquad \text{avec} : \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \overline{\psi} \end{pmatrix}, \quad \overline{\psi}\left(\tau\right) = 0 \end{aligned}$$

Alors l'auteur prétend (nous le vérifierons) que le propagateur prend la forme :

$$\frac{1}{\widetilde{K} - \lambda}\left(t, t'\right) = \frac{\theta(t-t')}{w}\begin{pmatrix} \phi(t')\psi(t) & \overline{\phi}(t')\psi(t) \\ \phi(t')\overline{\psi}(t) & \overline{\phi}(t')\overline{\psi}(t) \end{pmatrix} + \frac{\theta(t'-t)}{w}\begin{pmatrix} \phi(t)\psi(t') & \phi(t)\overline{\psi}(t') \\ \overline{\phi}(t)\psi(t') & \overline{\phi}(t)\overline{\psi}(t') \end{pmatrix}$$

Où w est le wronskien qui a l'expression suivante :

$$w(t) := \det\begin{pmatrix} \phi(t) & \psi(t) \\ \overline{\phi}(t) & \overline{\psi}(t) \end{pmatrix} = \phi(t)\overline{\psi}(t) - \psi(t)\overline{\phi}(t)$$

Nous posons :

$$\widetilde{G}\left(\bullet\right) := \begin{pmatrix} 0 & \bullet \\ -\bullet & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \widetilde{H}(t) := \widetilde{K}\left(t\right) - \widetilde{G}\left(\partial_t\right) = \begin{pmatrix} -i\widetilde{\mathrm{A}}\left(t\right) & 0 \\ 0 & -i\widetilde{\mathrm{C}}\left(t\right) \end{pmatrix}$$

Bien sûr $\widetilde{G}$ et $\widetilde{H}$ vérifient $\widetilde{G}^t = -\widetilde{G}$ et $\widetilde{H}^t = \widetilde{H}$. Alors on peut écrire le wronskien sous les formes :

$$w = \Xi^t\widetilde{G}\left(1\right)\Psi = \left(\widetilde{G}^t\left(1\right)\Xi\right)^t\Psi$$

On dérive par rapport au temps en utilisant une fois sur deux l'une et l'autre des expressions du wronskien :

$$\partial_t w = \Xi^t\widetilde{G}\left(\partial_t\right)\Psi + \left(\widetilde{G}^t\left(\partial_t\right)\Xi\right)^t\Psi = \Xi^t\widetilde{G}\left(\partial_t\right)\Psi - \left(\widetilde{G}\left(\partial_t\right)\Xi\right)^t\Psi$$

On peut ajouter comme un veut des opérateurs $\widetilde{K}$ puisque son application sur Ξ et Ψ est de donner 0 :

$$\partial_t w = \Xi^t\left(\widetilde{G}\left(\partial_t\right) - \widetilde{K}\right)\Psi + \left(\left(\widetilde{K} - \widetilde{G}\left(\partial_t\right)\right)\Xi\right)^t\Psi$$

Alors :

$$\partial_t w = -\Xi^t\widetilde{H}\left(t\right)\Psi + \left(\widetilde{H}\left(t\right)\Xi\right)^t\Psi = -\Xi^t\widetilde{H}\left(t\right)\Psi + \Xi^t\widetilde{H}^t\left(t\right)\Psi$$

On utilise la propriété de $\widetilde{H}$ pour écrire :

$$\partial_t w = -\Xi^t \widetilde{H}\,(t)\,\Psi + \Xi^t \widetilde{H}\,(t)\,\Psi = 0$$

Ainsi le wronskien est une constante, alors en tenant compte des conditions aux limites :

$$w\,(t) = w\,(0) = -\psi(0)\overline{\phi}(0) = w\,(\tau) = -\psi(\tau)\overline{\phi}(\tau)$$

Nous avons bien démontré l'indépendance temporelle. De plus nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{\widetilde{K}-\lambda}\left(t,t'\right) = \frac{\theta(t-t')}{w}\Psi(t)\,\Xi^t\left(t'\right) + \frac{\theta(t'-t)}{w}\Xi(t)\,\Psi^t\left(t'\right)$$

Nous devons vérifier, à défaut de l'avoir montré nous même, que cet opérateur est bien l'inverse de $\widetilde{K}-\lambda$, c'est à dire qu'il vérifie :

$$\left(\widetilde{K}-\lambda\right)\left(\widetilde{K}-\lambda\right)^{-1}\left(t,t'\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\delta\left(t-t'\right)$$

Nous pouvons décomposer dans l'opérateur non-inersé $\widetilde{K}$ en une partie d'opérateur différentiel $\widetilde{G}\,(\partial_t)$ et une partie "scalaire" $\widetilde{H}-\lambda$:

$$\left(\widetilde{K}-\lambda\right)\left(\widetilde{K}-\lambda\right)^{-1}\left(t,t'\right) = \left(\widetilde{G}\,(\partial_t) + \widetilde{H}\,(t) - \lambda\right)\left(\widetilde{K}-\lambda\right)^{-1}\left(t,t'\right)$$

On remarque alors que lorsque l'on va développer l'opérateur, à la dérivée de la fonction de Heavyside près, on va pouvoir reconstruire les termes $(\widetilde{K}-\lambda)\Xi$ et $(\widetilde{K}-\lambda)\Psi$ qui sont nuls. Cela dit il est évident qu'il reste :

$$\left(\widetilde{K}-\lambda\right)\left(\widetilde{K}-\lambda\right)^{-1}\left(t,t'\right) = \frac{\partial_t\theta(t-t')}{w}\widetilde{G}\,(1)\,\Psi(t)\,\Xi^t\left(t'\right) + \frac{\partial_t\theta(t'-t)}{w}\widetilde{G}\,(1)\,\Xi(t)\,\Psi^t\left(t'\right)$$

Alors :

$$\left(\widetilde{K}-\lambda\right)\left(\widetilde{K}-\lambda\right)^{-1}\left(t,t'\right) = \frac{\delta(t-t')}{w}\widetilde{G}\,(1)\left(\Psi(t)\,\Xi^t(t) - \Xi(t)\,\Psi^t(t)\right)$$

En effet, avec les distributions de Dirac on peut formellemenr écrire que $t=t'$. Mais :

$$\Psi(t)\,\Xi^t(t) - \Xi(t)\,\Psi^t(t) = \begin{pmatrix}\phi(t)\psi(t) & \overline{\phi}(t)\psi(t)\\ \phi(t)\overline{\psi}(t) & \overline{\phi}(t)\overline{\psi}(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\phi(t)\psi(t) & \phi(t)\overline{\psi}(t)\\ \overline{\phi}(t)\psi(t) & \overline{\phi}(t)\overline{\psi}(t)\end{pmatrix}$$

On obtient alors une expression dans laquelle on reconnait le wronskien :

$$\Psi(t)\,\Xi^t(t) - \Xi(t)\,\Psi^t(t) = \begin{pmatrix}0 & \overline{\phi}(t)\psi(t) - \phi(t)\overline{\psi}(t)\\ \phi(t)\overline{\psi}(t) - \overline{\phi}(t)\psi(t) & 0\end{pmatrix} = w\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\left(\widetilde{K}-\lambda\right)\left(\widetilde{K}-\lambda\right)^{-1}\left(t,t'\right) = \delta\left(t-t'\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Ce calcul élémentaire redonne bien :

$$\left(\widetilde{K}-\lambda\right)\left(\widetilde{K}-\lambda\right)^{-1}\left(t,t'\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\delta\left(t-t'\right)$$

Enfin on vérifie que l'opérateur $\left(\widetilde{K}-\lambda\right)^{-1}$ laisse invariant, comme $\widetilde{K}-\lambda$, l'espace des fonctions à deux composantes telles que définies en (3.16) et (3.16). Posons alors :

$$\mathrm{Y}_1(t)=\begin{pmatrix}\xi_1(t)\\ \bar{\xi}_1(t)\end{pmatrix},\qquad \xi_1(0)=0,\ \ \bar{\xi}_1(\tau)=0$$

Posons encore :

$$\mathrm{Y}_2(t)=\int_0^\tau\left(\widetilde{K}-\lambda\right)^{-1}(t,t')\,\mathrm{Y}_1(t')\,\mathrm{d}t'=\begin{pmatrix}\xi_2(t)\\ \bar{\xi}_2(t)\end{pmatrix}$$

Vérifions que $\xi_2(0)=0,\bar{\xi}_2(\tau)=0$:

$$\mathrm{Y}_2(t)=\int_0^\tau\left(\frac{\theta(t-t')}{w}\Psi(t)\,\Xi^t(t')+\frac{\theta(t'-t)}{w}\Xi(t)\,\Psi^t(t')\right)\mathrm{Y}_1(t')\,\mathrm{d}t'$$

Alors en utilisant l'expression de la fonction de Heavyside :

$$\mathrm{Y}_2(t)=\frac{1}{w}\Psi(t)\int_0^t\Xi^t(t')\,\mathrm{Y}_1(t')\,\mathrm{d}t'+\frac{1}{w}\Xi(t)\int_t^\tau\Psi^t(t')\,\mathrm{Y}_1(t')\,\mathrm{d}t'$$

Ainsi :

$$\mathrm{Y}_2(0)=\frac{1}{w}\Xi(0)\int_0^\tau\Psi^t(t')\,\mathrm{Y}_1(t')\,\mathrm{d}t'\Longrightarrow\xi_2(0)=\frac{1}{w}\phi(0)\int_0^\tau\Psi^t(t')\,\mathrm{Y}_1(t')\,\mathrm{d}t'=0$$
$$\mathrm{Y}_2(\tau)=\frac{1}{w}\Psi(\tau)\int_0^\tau\Xi^t(t')\,\mathrm{Y}_1(t')\,\mathrm{d}t'\Longrightarrow\bar{\xi}_2(\tau)=\frac{1}{w}\overline{\psi}(\tau)\int_0^\tau\Xi^t(t')\,\mathrm{Y}_1(t')\,\mathrm{d}t'=0$$

L'opérateur en question à bien pour image le même espace qu'au départ !

La travail consiste maintenant, en nous souvenant de l'équation (3.15), de calculer la trace de l'opérateur $\left(\widetilde{K}-\lambda\right)^{-1}$. L'opérateur ayant deux types d'indices (discret et continu), la trace prend la forme suivante (en introduisant un notation spécifique pour la trace discrète $\dot{\mathrm{tr}}$) :

$$\mathrm{tr}\left(\frac{1}{\widetilde{\mathrm{K}}-\lambda}\right)=\int_0^\tau\dot{\mathrm{tr}}\left(\frac{1}{\widetilde{\mathrm{K}}-\lambda}\right)(t,t)\,\mathrm{d}t$$

Avec la convention $\theta(0)=1/2$ il vient que :

$$\mathrm{tr}\left(\frac{1}{\widetilde{\mathrm{K}}-\lambda}\right)=\frac{1}{w}\int_0^\tau\left(\psi(t)\,\phi(t)+\overline{\psi}(t)\,\overline{\phi}(t)\right)\mathrm{d}t$$

Pour calculer cette intégrale reconsidérons l'équation suivante :

$$\left(\widetilde{\mathrm{K}}-\lambda\right)\Xi=0\tag{3.15}$$

Dérivons-la par rapport à λ :

$$\left(\widetilde{\mathrm{K}}-\lambda\right)\partial_\lambda\Xi=\Xi$$

On peut ajouter un terme du type $-\alpha\Xi$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et sur lequel agit l'opérateur puisqu'il annule ce terme :

$$\left(\widetilde{\mathrm{K}} - \lambda\right)\left(\partial_\lambda \Xi - \alpha \Xi\right) = \Xi$$

Ainsi en inversant l'opérateur, il vient que :

$$\partial_\lambda \Xi = \left(\widetilde{K} - \lambda\right)^{-1} \Xi + \alpha \Xi \tag{3.16}$$

Considérons cette relation en $t = \tau$:

$$\partial_\lambda \Xi(\tau) = \frac{1}{w} \Psi(\tau) \int_0^\tau \Xi^t(t')\, \Xi(t')\, \mathrm{d}t' + \alpha \Xi(\tau)$$

Si l'on écrit la seconde composante de cette équation il vient que :

$$\partial_\lambda \overline{\phi}(\tau) = \frac{1}{w} \overline{\psi}(\tau) \int_0^\tau \left(\phi(t')\, \phi(t') + \overline{\phi}(t')\, \overline{\phi}(t')\right) \mathrm{d}t' + \alpha \overline{\phi}(\tau) = \alpha \overline{\phi}(\tau)$$

Si bien que :

$$\alpha = \frac{\partial_\lambda \overline{\phi}(\tau)}{\overline{\phi}(\tau)}$$

Considérons maintenant l'équation (3.17) en $t = 0$:

$$\partial_\lambda \Xi(0) = \frac{1}{w} \Xi(0) \int_0^\tau \Psi^t(t')\, \Xi(t')\, \mathrm{d}t' + \frac{\partial_\lambda \overline{\phi}(\tau)}{\overline{\phi}(\tau)} \Xi(0)$$

Considérons la deuxième composante de cette équation :

$$\partial_\lambda \overline{\phi}(0) = \frac{1}{w} \overline{\phi}(0) \int_0^\tau \left(\psi(t')\, \phi(t') + \overline{\psi}(t')\, \overline{\phi}(t')\right) \mathrm{d}t' + \frac{\partial_\lambda \overline{\phi}(\tau)}{\overline{\phi}(\tau)} \overline{\phi}(0)$$

Si bien que :

$$\frac{1}{w} \int_0^\tau \left(\psi(t)\, \phi(t) + \overline{\psi}(t)\, \overline{\phi}(t)\right) \mathrm{d}t = \frac{\partial_\lambda \overline{\phi}(0)}{\overline{\phi}(0)} - \frac{\partial_\lambda \overline{\phi}(\tau)}{\overline{\phi}(\tau)} = \partial_\lambda \ln\left(\frac{\overline{\phi}(0)}{\overline{\phi}(\tau)}\right)$$

Nous aurions tout aussi bien pu dès l'équation (3.16) utiliser Ψ plutôt que Ξ et nous aurions trouvé :

$$\frac{1}{w} \int_0^\tau \left(\psi(t)\, \phi(t) + \overline{\psi}(t)\, \overline{\phi}(t)\right) \mathrm{d}t = \frac{\partial_\lambda \psi(\tau)}{\psi(\tau)} - \frac{\partial_\lambda \psi(0)}{\psi(0)} = \partial_\lambda \ln\left(\frac{\psi(\tau)}{\psi(0)}\right)$$

Revenant au calcul du propagateur, en comparant les derniers résultats à l'expression (3.15) nous en déduisons que :

$$f(\lambda = 0) = \det\left(\frac{\widetilde{K}}{\widetilde{K}_0}\right) = \frac{\overline{\phi}(\tau, \lambda = 0)}{\overline{\phi}(0, \lambda = 0)} = \frac{\psi(0, \lambda = 0)}{\psi(\tau, \lambda = 0)} \tag{3.17}$$

Souvenons nous maintenant de solution Y qui est solution de l'équation de Jacobi (3.12), nous avons alors, selon les équations (3.10) et (3.11), ainsi que les équations (3.7) et (3.8)

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{\delta \xi}{1 + \bar{\xi}_c \xi_c} \exp\left(i \int_0^t \mathrm{B} \mathrm{d}s\right) \\ \bar{\eta}' &= \frac{\delta \bar{\xi}}{1 + \bar{\xi}_c \xi_c} \exp\left(-i \int_0^t \mathrm{B} \mathrm{d}s\right) \end{aligned}$$

Considérons maintenant des fonctions $u(t)$ et $\bar{u}(t)$ qui vérifient aussi les équations de Jacobi, mais qui n'ont pas de conditions initiales spécifiées, nous aurons pareillement :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\delta\xi(t)}{1+\bar{\xi}_c\xi_c}\exp\left(i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right) \\ \bar{u}(t) &= \frac{\delta\bar{\xi}(t)}{1+\bar{\xi}_c\xi_c}\exp\left(-i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right) \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire que la solution ne dépend que des conditions initiales ξ_0 et $\bar{\xi}_\tau$:

$$\delta\xi(t) = \frac{\partial\xi_c(t)}{\partial\xi_0}\delta\xi_0 + \frac{\partial\xi_c(t)}{\partial\bar{\xi}_\tau}\delta\bar{\xi}_\tau$$
$$\delta\bar{\xi(t)} = \frac{\partial\bar{\xi}_c(t)}{\partial\xi_0}\delta\xi_0 + \frac{\partial\bar{\xi}_c(t)}{\partial\bar{\xi}_\tau}\delta\bar{\xi}_\tau$$

Alors les variables $u(t)$ et $\bar{u}(t)$ deviennent :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{1+\bar{\xi}_c\xi_c}\exp\left(i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right)\frac{\partial\xi_c(t)}{\partial\xi_0}\delta\xi_0 + \frac{1}{1+\bar{\xi}_c\xi_c}\exp\left(i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right)\frac{\partial\xi_c(t)}{\partial\bar{\xi}_\tau}\delta\bar{\xi}_\tau \\ \bar{u}(t) &= \frac{1}{1+\bar{\xi}_c\xi_c}\exp\left(-i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right)\frac{\partial\bar{\xi}_c(t)}{\partial\xi_0}\delta\xi_0 + \frac{1}{1+\bar{\xi}_c\xi_c}\exp\left(-i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right)\frac{\partial\bar{\xi}_c(t)}{\partial\bar{\xi}_\tau}\delta\bar{\xi}_\tau \end{aligned}$$

Comme $u(t)$ et $\bar{u}(t)$ sont solutions des équations de Jacobi, indépendament de la variation des conditions initiales, les quatres termes intervenant le sont aussi. On peut même vérifier que l'on a (à un facteur constant sans importance près) :

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{1+\bar{\xi}_c\xi_c}\exp\left(i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right)\frac{\partial\xi_c(t)}{\partial\bar{\xi}_\tau} \\ \overline{\phi}(t) &= \frac{1}{1+\bar{\xi}_c\xi_c}\exp\left(-i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right)\frac{\partial\bar{\xi}_c(t)}{\partial\bar{\xi}_\tau} \\ \psi(t) &= \frac{1}{1+\bar{\xi}_c\xi_c}\exp\left(i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right)\frac{\partial\xi_c(t)}{\partial\xi_0} \\ \overline{\psi}(t) &= \frac{1}{1+\bar{\xi}_c\xi_c}\exp\left(-i\int_0^t \mathrm{B}\mathrm{d}s\right)\frac{\partial\bar{\xi}_c(t)}{\partial\xi_0} \end{aligned}$$

On a en effet bien $\phi(0) = 0$ et $\overline{\psi}(\tau) = 0$ puisque les paramètres ξ_0 et $\bar{\xi}_\tau$ étant indépendant on a :

$$\frac{\partial\xi_c(0)}{\partial\bar{\xi}_\tau} = \frac{\partial\bar{\xi}_c(\tau)}{\partial\xi_0} = 0$$

Reprenant l'équation (3.18) nous écrivons :

$$\det\left(\frac{\widetilde{K}}{\widetilde{K}_0}\right) = \frac{1+|\xi_c(0)|^2}{1+|\xi_c(\tau)|^2}\exp\left(-i\int_0^\tau \mathrm{B}\mathrm{d}t\right)\frac{\frac{\partial\bar{\xi}_c(\tau)}{\partial\bar{\xi}_\tau}}{\frac{\partial\bar{\xi}_c(0)}{\partial\bar{\xi}_\tau}} = \frac{1+|\xi_c(\tau)|^2}{1+|\xi_c(0)|^2}\exp\left(-i\int_0^\tau \mathrm{B}\mathrm{d}t\right)\frac{\frac{\partial\xi_c(0)}{\partial\xi_0}}{\frac{\partial\xi_c(\tau)}{\partial\xi_0}}$$

On a bien sûr $\frac{\partial\bar{\xi}_c(\tau)}{\partial\bar{\xi}_\tau} = \frac{\partial\xi_c(0)}{\partial\xi_0} = 1$, alors :

$$\det\left(\frac{\widetilde{K}}{\widetilde{K}_0}\right) = \frac{1+|\xi_c(0)|^2}{1+|\xi_c(\tau)|^2}\exp\left(-i\int_0^\tau \mathrm{B}\mathrm{d}t\right)\left(\frac{\partial\bar{\xi}_c(0)}{\partial\bar{\xi}_\tau}\right)^{-1} = \frac{1+|\xi_c(\tau)|^2}{1+|\xi_c(0)|^2}\exp\left(-i\int_0^\tau \mathrm{B}\mathrm{d}t\right)\left(\frac{\partial\xi_c(\tau)}{\partial\xi_0}\right)^{-1}$$

Ecrivons alors la demi-somme des deux expressions possibles pour le déterminant (son inverse) ci-dessus :

$$\left(\det\left(\frac{\widetilde{K}}{\widetilde{K}_0}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{2}\frac{1+|\xi_c(\tau)|^2}{1+|\xi_c(0)|^2}\exp\left(i\int_0^\tau \mathrm{B}dt\right)\frac{\partial\bar{\xi}_c(0)}{\partial\bar{\xi}_\tau} + \frac{1}{2}\frac{1+|\xi_c(0)|^2}{1+|\xi_c(\tau)|^2}\exp\left(i\int_0^\tau \mathrm{B}dt\right)\frac{\partial\xi_c(\tau)}{\partial\xi_0}$$

On factorise ce qui peut l'être :

$$\left(\det\left(\frac{\widetilde{K}}{\widetilde{K}_0}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+|\xi_c(\tau)|^2}{1+|\xi_c(0)|^2}\frac{\partial\bar{\xi}_c(0)}{\partial\bar{\xi}_\tau} + \frac{1+|\xi_c(0)|^2}{1+|\xi_c(\tau)|^2}\frac{\partial\xi_c(\tau)}{\partial\xi_0}\right)\exp\left(i\int_0^\tau \mathrm{B}dt\right)$$

Des équations (3.2) nous tirons que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{\xi}_c(0)}{\partial\bar{\xi}_\tau} &= \frac{\left(1+|\xi_c(0)|^2\right)^2}{2j}\frac{\partial^2\Phi_c}{\partial\xi_0\partial\bar{\xi}_\tau}\\ \frac{\partial\xi_c(\tau)}{\partial\xi_0} &= \frac{\left(1+|\xi_c(\tau)|^2\right)^2}{2j}\frac{\partial^2\Phi_c}{\partial\xi_0\partial\bar{\xi}_\tau}\end{aligned}$$

Dans l'expression du déterminant nous avons :

$$\left(\det\left(\frac{\widetilde{K}}{\widetilde{K}_0}\right)\right)^{-1} = \frac{\left(1+|\xi_c(0)|^2\right)\left(1+|\xi_c(\tau)|^2\right)}{2j}\frac{\partial^2\Phi_c}{\partial\xi_0\partial\bar{\xi}_\tau}\exp\left(i\int_0^\tau \mathrm{B}dt\right)$$

Nous en déduisons le propagateur réduit (3.13) :

$$G_{\mathrm{red}} = \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\tau \mathrm{B}dt\right)\left(\frac{\left(1+|\xi_c(0)|^2\right)\left(1+|\xi_c(\tau)|^2\right)}{2j}\frac{\partial^2\Phi_c}{\partial\xi_0\partial\bar{\xi}_\tau}\right)^{1/2}$$

Nous arrivons enfin au propagateur de l'approximation semi-classique :

$$G(\bar{\xi}_\tau,\xi_0;\tau) = \exp\left(\Phi_c + \frac{i}{2}\int_0^\tau \mathrm{B}dt\right)\left(\frac{\left(1+|\xi_c(0)|^2\right)\left(1+|\xi_c(\tau)|^2\right)}{2j}\frac{\partial^2\Phi_c}{\partial\xi_0\partial\bar{\xi}_\tau}\right)^{1/2}$$

Où l'on a :

$$\mathrm{B} = \frac{1}{4j}\left\{\partial_\xi[(1+\bar{\xi}\xi)^2\,\partial_{\bar{\xi}}H] + \partial_{\bar{\xi}}[(1+\bar{\xi}\xi)^2\,\partial_\xi H]\right\}_c$$

Les équations classiques du mouvement (3.3) et (3.4) on peut encore l'écrire :

$$\mathrm{B} = \frac{i}{2}\left(\partial_\xi\dot{\xi} - \partial_{\bar{\xi}}\dot{\bar{\xi}}\right)_c$$

3.3 Une exemple simple

Considérons le cas simple où $\hat{H} = \omega \hat{J}_z$, alors :

$$H(z, \bar{z}) = \langle z|\omega \hat{J}_z|z\rangle$$

On se remémore l'équation (2.6) (réécrite pour un vecteur normé) :

$$|z\rangle = \frac{1}{(1+\bar{z}z)^j} \sum_{k=0}^{2j} \sqrt{\binom{2j}{k}} z^k \,|j, k-j\rangle$$

Ainsi :

$$\hat{J}_z\,|z\rangle = \frac{1}{(1+\bar{z}z)^j} \sum_{k=0}^{2j} \sqrt{\binom{2j}{k}} z^k \hat{J}_z\,|j, k-j\rangle = \frac{1}{(1+\bar{z}z)^j} \sum_{k=0}^{2j} (k-j) \sqrt{\binom{2j}{k}} z^k \,|j, k-j\rangle$$

Alors :

$$\langle z|\hat{J}_z|z\rangle = \frac{1}{(1+\bar{z}z)^{2j}} \sum_{k,l=0}^{2j} (k-j) \sqrt{\binom{2j}{l}} \sqrt{\binom{2j}{k}} \bar{z}^l z^k \,\langle j, k-l|j, k-j\rangle$$

Mais $\langle j, l-j|j, k-j\rangle = \delta_{l-j,k-j} = \delta_{l,k}$:

$$\langle z|\hat{J}_z|z\rangle = \frac{1}{(1+\bar{z}z)^{2j}} \sum_{k=0}^{2j} (k-j) \binom{2j}{k} (\bar{z}z)^k = \frac{1}{(1+\bar{z}z)^{2j}} \sum_{k=0}^{2j} k \binom{2j}{k} (\bar{z}z)^k - \frac{j}{(1+\bar{z}z)^{2j}} \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k} (\bar{z}z)^k$$

La seconde somme n'est autre qu'un binôme de Newton et malgré les apparences la première aussi :

$$\sum_{k=0}^{2j} k \binom{2j}{k} (\bar{z}z)^k = \sum_{k=1}^{2j} \frac{(2j)!}{(2j-k)!(k-1)!} (\bar{z}z)^k = 2j \sum_{k=1}^{2j} \frac{(2j-1)!}{(2j-k)!(k-1)!} (\bar{z}z)^k = 2j \sum_{k=1}^{2j} \binom{2j-1}{k-1} (\bar{z}z)^k$$

Soit alors :

$$\sum_{k=0}^{2j} k \binom{2j}{k} (\bar{z}z)^k = 2j\bar{z}z \sum_{p=0}^{2j-1} \binom{2j-1}{p} (\bar{z}z)^p = 2j\bar{z}z\,(1+\bar{z}z)^{2j-1}$$

Ainsi :

$$\langle z|\hat{J}_z|z\rangle = \frac{2j\bar{z}z}{1+\bar{z}z} - j$$

Ainsi la fonction hamiltonienne est :

$$H(z, \bar{z}) = \frac{2j\omega\bar{z}z}{1+\bar{z}z} - j\omega$$

Calculons $\partial_z H(z, \bar{z})$ et $\partial_{\bar{z}} H(z, \bar{z})$:

$$\begin{aligned} \partial_z H(z, \bar{z}) &= \frac{2j\omega\bar{z}}{(1+\bar{z}z)^2} \\ \partial_{\bar{z}} H(z, \bar{z}) &= \frac{2j\omega z}{(1+\bar{z}z)^2} \end{aligned}$$

Reprenant les équations classiques du mouvement (3.3) et (3.4) nous avons alors :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}} &= i\omega\bar{z}\\ \dot{z} &= -i\omega z\end{aligned}$$

Avec les conditions initiales, les solutions classiques du mouvement donnent :

$$\begin{aligned}\xi_c(t) &= \xi_0\exp\left(-i\omega t\right)\\ \bar{\xi}_c(t) &= \bar{\xi}_\tau\exp\left(-i\omega\left(\tau-t\right)\right)\end{aligned}$$

Dous déterminons maintenant l'action du chemin classique :

$$\Phi_c = j\int_0^\tau \frac{\dot{\bar{\xi}}_c(t)\xi_c(t)-\dot{\xi}_c(t)\bar{\xi}_c(t)}{1+\bar{\xi}_c(t)\xi_c(t)}\mathrm{d}t - i\int_0^\tau H\big(\xi_c(t),\bar{\xi}_c(t)\big)\,\mathrm{d}t + j\ln\left(\frac{\big(1+\bar{\xi}_\tau\xi_c(\tau)\big)\big(1+\bar{\xi}_c(0)\xi_0\big)}{\big(1+\bar{\xi}_0\xi_0\big)\big(1+\bar{\xi}_\tau\xi_\tau\big)}\right)$$

Soit :

$$\Phi_c = 2ij\omega\int_0^\tau \frac{\bar{\xi}_c(t)\xi_c(t)}{1+\bar{\xi}_c(t)\xi_c(t)}\mathrm{d}t - i\int_0^\tau\left(\frac{2j\omega\bar{\xi}_c(t)\xi_c(t)}{1+\bar{\xi}_c(t)\xi_c(t)}-j\omega\right)\mathrm{d}t + j\ln\left(\frac{\big(1+\bar{\xi}_\tau\xi_c(\tau)\big)\big(1+\bar{\xi}_c(0)\xi_0\big)}{\big(1+\bar{\xi}_0\xi_0\big)\big(1+\bar{\xi}_\tau\xi_\tau\big)}\right)$$

Deux intégrales se simplifient et en remplaçant les variables dynamiques par leurs solutions :

$$\Phi_c = ij\omega\int_0^\tau \mathrm{d}t + j\ln\left(\frac{\big(1+\xi_0\bar{\xi}_\tau e^{-i\omega\tau}\big)\big(1+\xi_0\bar{\xi}_\tau e^{-i\omega\tau}\big)}{\big(1+\bar{\xi}_0\xi_0\big)\big(1+\bar{\xi}_\tau\xi_\tau\big)}\right)$$

Soit donc :

$$\Phi_c = ij\omega\tau + 2j\ln\big(1+\xi_0\bar{\xi}_\tau e^{-i\omega\tau}\big) - j\ln\big(1+\bar{\xi}_0\xi_0\big) - j\ln\big(1+\bar{\xi}_\tau\xi_\tau\big)$$

On peut alors calculer la dérivée mixte en les conditions initiales (le premier terme et les deux derniers n'interviennent pas) :

$$\frac{\partial^2\Phi_c}{\partial\xi_0\partial\bar{\xi}_\tau} = \frac{2je^{-i\omega\tau}}{\big(1+\xi_0\bar{\xi}_\tau e^{-i\omega\tau}\big)^2}$$

De plus comme :

$$\mathrm{B} = \frac{i}{2}\left(\partial_\xi\dot{\xi}-\partial_{\bar{\xi}}\dot{\bar{\xi}}\right)_c = \frac{i}{2}\left(\partial_\xi\dot{\xi}-\partial_{\bar{\xi}}\dot{\bar{\xi}}\right)_c = \frac{i^2\omega}{2}\left(\partial_\xi\xi+\partial_{\bar{\xi}}\bar{\xi}\right)_c = \omega$$

Si bien que finalement nous trouvons pour l'expression du propagateur :

$$G\big(\bar{\xi}_\tau,\xi_0;\tau\big) = \exp\left(\Phi_c+\frac{i}{2}\int_0^\tau\omega\mathrm{d}t\right)\left(\frac{\big(1+|\xi_c(0)|^2\big)\big(1+|\xi_c(\tau)|^2\big)}{2j}\frac{2je^{-i\omega\tau}}{\big(1+\xi_0\bar{\xi}_\tau e^{-i\omega\tau}\big)^2}\right)^{1/2}$$

Que l'on peut simplifier en :

$$G\big(\bar{\xi}_\tau,\xi_0;\tau\big) = \frac{\sqrt{\left(1+|\xi_c(0)|^2\right)\left(1+|\xi_c(\tau)|^2\right)}}{1+\xi_0\bar{\xi}_\tau e^{-i\omega\tau}}\exp\left(\Phi_c\right)$$

Mais $|\xi_c(0)|^2$ et $|\xi_c(\tau)|^2$ sont des notations fourbes pour $\bar{\xi}_c(0)\xi_c(0) = \xi_0\bar{\xi}_\tau e^{-i\omega\tau}$ et $\bar{\xi}_c(\tau)\xi_c(\tau) = \xi_0\bar{\xi}_\tau e^{-i\omega\tau}$, alors :

$$G\big(\bar{\xi}_\tau,\xi_0;\tau\big) = \exp\left(\Phi_c\right)$$

Il s'avère que cette expression est en réalité exacte (pour ce hamiltonien particulier), comme le dit Kochetov dans son article (la justification étant cependant abrupte !).

3.4 Quantification de l'énergie

Pareillement à la condition de Bohr-Sommerfeld nous pouvons écrire, pour un état stationnaire dont la fonction d'onde est monovaluée sur la sphère de Riemman, que le terme "cinétique" de l'action Φ_c vérifie :

$$-ij\int_0^\tau \frac{\dot{\bar{z}}(t)z(t)-\dot{z}(t)\bar{z}(t)}{1+\bar{z}(t)z(t)}\mathrm{d}t = (2n+\nu/2)\,\pi$$

Où $n = 0, 1, \cdots, j$ ν est le nombre de singularités de propagateur réduit, dans le cas du champ magnétique constant $G_{\mathrm{red}} = 1$ soit $\nu = 0$. Alors :

$$-ij\int_0^\tau \frac{\dot{\bar{z}}(t)z(t)-\dot{z}(t)\bar{z}(t)}{1+\bar{z}(t)z(t)}\mathrm{d}t = 2n\pi$$

Mais l'équation (3.3), qui vérifie pour un état stationnaire $H(z,\bar{z}) = E$, permet d'écrire que :

$$\frac{2zj\bar{z}}{1+z\bar{z}} = \frac{E+j\omega}{\omega}$$

Les équations dynamiques permettent aussi de réécrire le terme cinétique :

$$\frac{\dot{\bar{z}}(t)z(t)-\dot{z}(t)\bar{z}(t)}{1+\bar{z}(t)z(t)} = \frac{2i\omega\bar{z}(t)z(t)}{1+\bar{z}(t)z(t)}$$

Pour un état stationnaire on doit avoir $\tau = 2\pi/\omega$, si bien que :

$$j\int_0^\tau \frac{2\omega\bar{z}(t)z(t)}{1+\bar{z}(t)z(t)}\mathrm{d}t = (E+j\omega)\int_0^\tau \mathrm{d}t = \frac{2\pi\,(E+j\omega)}{\omega} = 2n\pi$$

Si bien que finalement :

$$E = (n-j)\omega$$

Chapitre 4

Annexe, Mesure sur la sphère de Riemann

Il s'agit ici de déterminer la déformation surfacique lors du passage du plan complexe à la sphère de Riemann. On connait la procédure de la projection stéréographique pour passer de l'un à l'autre : on considère une sphère de rayon 1 de centre le centre du plan complexe, on assimile alors du point de vue vectoriel $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, et la troisème direction permet de construire une espace tridimensionnel dans lequel la sphère existe. Nous avons, d'une certaine manière on a $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3$ et le tout munit d'une métrique euclidienne. On fait l'association suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (z, a) & \longmapsto & \Re(z)\mathbf{u}_x + \Im(z)\mathbf{u}_y + a\mathbf{u}_z \end{array}$$

La sphère de Riemann $\mathcal{S}$ possède un pôle nord, que l'on note logiquement N, et dont les coordonnées vérifient, si O est considéré comme l'origine :

$$\mathbf{ON} = \mathbf{u}_z$$

Un point z du seul point complexe, repéré par un point M vérifie simplement :

$$\mathbf{OM} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y$$

Où l'on a posé $x = \Re(z)$ et $y = \Im(z)$.

La projection stéréographique consiste à considérer une correspondance bijective entre un point de la sphère et un point du plan complexe. Pour ce faire, on considère la droite $(\mathcal{D})$ passant entre le pôle nord N et le point M. Cette droite coupe la sphère une unique fois (autre qu'en le pôle nord !) et c'est ce point, nommé P, qui fait la correspondance voulue. La droite $(\mathcal{D})$ est simplement l'ensemble des points suivants :

$$(\mathcal{D}) := \left\{ \mathrm{A} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{OA}\,(t) = \mathrm{t}\mathbf{NM} + \mathbf{ON}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

On vérifie que $\mathbf{OA}\,(0) = \mathbf{ON}$ et $\mathbf{OA}\,(1) = \mathbf{OM}$. Nous décomposons alors le vecteur $\mathbf{OA}\,(t)$ sur les vecteurs $\mathbf{ON}$ et $\mathbf{OM}$, qui sont orthogonaux entre eux :

$$\mathbf{OA}\,(t) = (1 - t)\mathbf{ON} + t\mathbf{OM}$$

Nous cherchons maintenant le paramètre t_{P} du point P. Ce dernier étant sur le cercle il vérifie :

$$\mathbf{OA}^2\,(t_{\mathrm{P}}) = 1$$

Nous obtenons alors l'équation que vérifie t_P (et $t_\mathrm{N}=0$ aussi !) :

$$(1-t)^2+t^2(x^2+y^2)=1$$

On résout cette équation, en supprimant la solution nulle qui, on l'a déjà dit, correspond au pôle nord :

$$t_\mathrm{P}=\frac{2}{1+x^2+y^2}$$

Comme nous avons l'équation de la droite, nous pouvons en déduire les coordonnées du point P :

$$\mathbf{OA}\,(t_\mathrm{P})=\mathbf{OP}=(1-t_\mathrm{P})\mathbf{ON}+t_\mathrm{P}\mathbf{OM}$$

Nous écrivons ce vecteur en coordonnées cartésiennes :

$$\mathbf{OP}\longrightarrow t_\mathrm{P}\begin{pmatrix}x\\y\\1/t_\mathrm{P}-1\end{pmatrix}=\frac{1}{1+x^2+y^2}\begin{pmatrix}2x\\2y\\1+x^2+y^2-2\end{pmatrix}=\frac{1}{1+x^2+y^2}\begin{pmatrix}2x\\2y\\x^2+y^2-1\end{pmatrix}$$

L'aire balayée par le point P sur la sphère de Riemann lorsque le point M a des coordonnées passant de (x,y) à $(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)$ se calcule de la manière suivante. Lorsque le point M varie, le point P varie aussi, de la manière suivante :

$$\mathbf{OP}(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y)=\mathbf{OP}(x,y)+\frac{\partial\mathbf{OP}}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\mathbf{OP}}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Les deux vecteurs dérivées ne sont rien d'autre que des vecteurs qui montrent comment l'aire est balayée. Ils forment un parallélogramme, dont l'aire est celle que nous cherchons. Nous savons que l'aire d'un parallélogramme sous-tendu par deux vecteurs est la norme de leur produit vectoriel, alors l'élément de surface élémentaire sur la sphère est :

$$\mathrm{d}^2_{\mathcal{S}}s=\left\|\frac{\partial\mathbf{OP}}{\partial x}\wedge\frac{\partial\mathbf{OP}}{\partial y}\right\|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Or après un calcul facile, mais inutilement fastidieux :

$$\frac{\partial\mathbf{OP}}{\partial x}\longrightarrow\frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix}1+y^2-x^2\\-2xy\\2x\end{pmatrix},\qquad\frac{\partial\mathbf{OP}}{\partial y}\longrightarrow\frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix}-2xy\\1+x^2-y^2\\2y\end{pmatrix}$$

Nous calculons le produit vectoriel :

$$\frac{\partial\mathbf{OP}}{\partial x}\wedge\frac{\partial\mathbf{OP}}{\partial y}\longrightarrow\frac{4}{(1+x^2+y^2)^4}\begin{pmatrix}1+y^2-x^2\\-2xy\\2x\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2xy\\1+x^2-y^2\\2y\end{pmatrix}$$

On effectue le calcul :

$$\frac{\partial\mathbf{OP}}{\partial x}\wedge\frac{\partial\mathbf{OP}}{\partial y}\longrightarrow\frac{4}{(1+x^2+y^2)^4}\begin{pmatrix}-2x(1+x^2+y^2)\\-2y(1+x^2+y^2)\\1-(x^2-y^2)^2-4x^2y^2\end{pmatrix}$$

Des simplifications s'opèrent :

$$\frac{\partial\mathbf{OP}}{\partial x}\wedge\frac{\partial\mathbf{OP}}{\partial y}\longrightarrow\frac{4}{(1+x^2+y^2)^4}\begin{pmatrix}-2x(1+x^2+y^2)\\-2y(1+x^2+y^2)\\1-(x^2+y^2)^2\end{pmatrix}$$

Alors, revenant à l'aire élémentaire sur la sphère de Riemann :

$$\mathrm{d}^2_{\mathcal{S}}s = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^4}\sqrt{4(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)^2+(1-(x^2+y^2)^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Il est commode de réintroduire $|z|^2 = x^2+y^2$:

$$\mathrm{d}^2_{\mathcal{S}}s = \frac{4}{(1+|z|^2)^4}\sqrt{4|z|^2(1+|z|^2)^2+(1-|z|^2)^2(1+|z|^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Si bien que :

$$\mathrm{d}^2_{\mathcal{S}}s = \frac{4}{(1+|z|^2)^4}\sqrt{(4|z|^2+(1-|z|^2)^2)(1+|z|^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

On vérifie vite que $4|z|^2+(1-|z|^2)^2 = (1+|z|^2)^2$, nous trouvons alors finalement le résultat suivant :

$$\mathrm{d}^2_{\mathcal{S}}s = \frac{4}{(1+|z|^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Nous voyons maintenant que lorsque dans la formule (2.7) nous avions assez arbitrairement ajouté le terme en $\left(1+|z|^2\right)^{-2}$, nous ne faisions pas complètement n'importe quoi ! C'est le bon terme sur la sphère de Riemann.