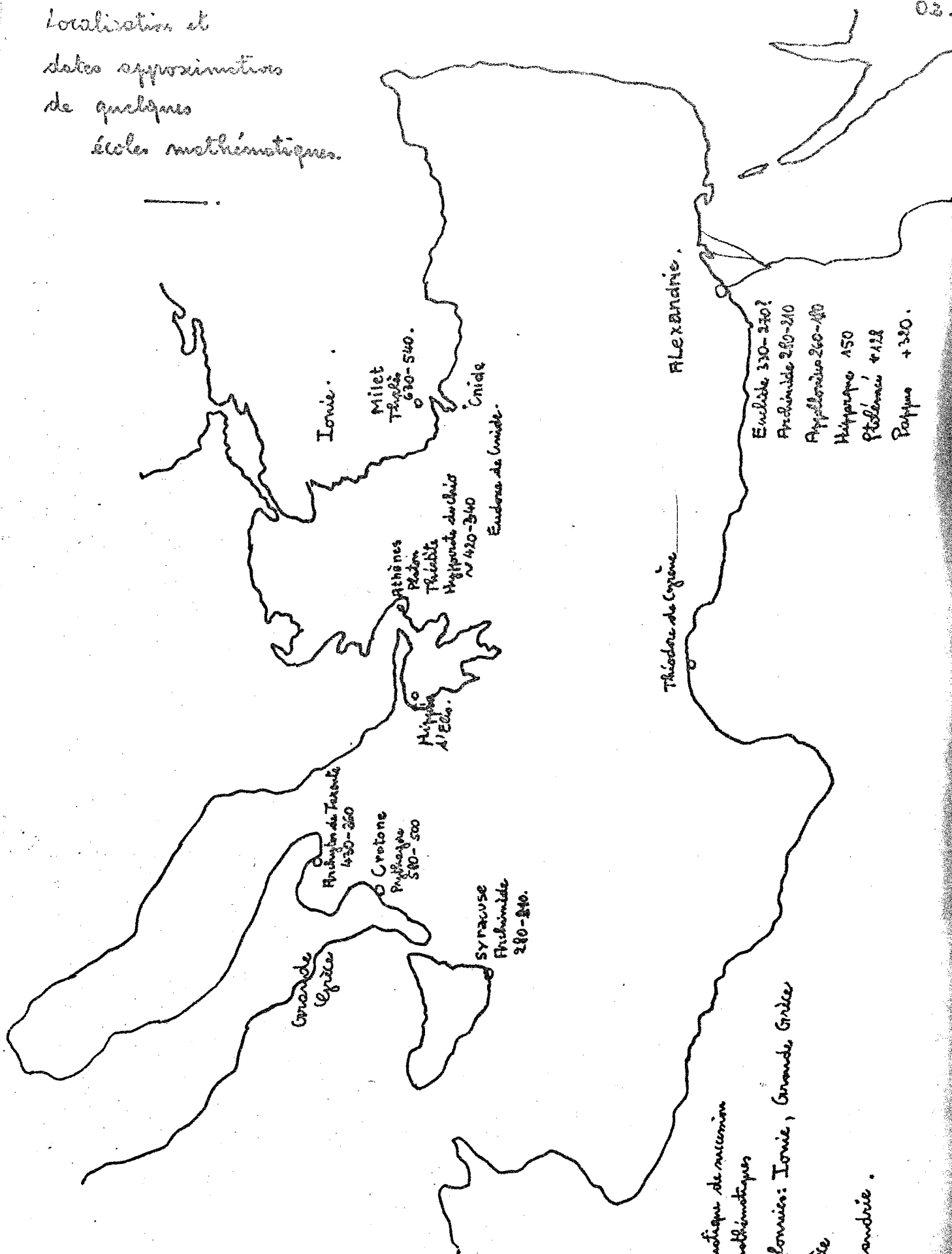


Le développement
des
mathématiques
à
l'époque grecque.

Texte de Bertrand Rochmer
Dactylographie et présentation d' Isabelle Jacomy.

localisation et
dates approximatives
de quelques
écrits mathématiques.



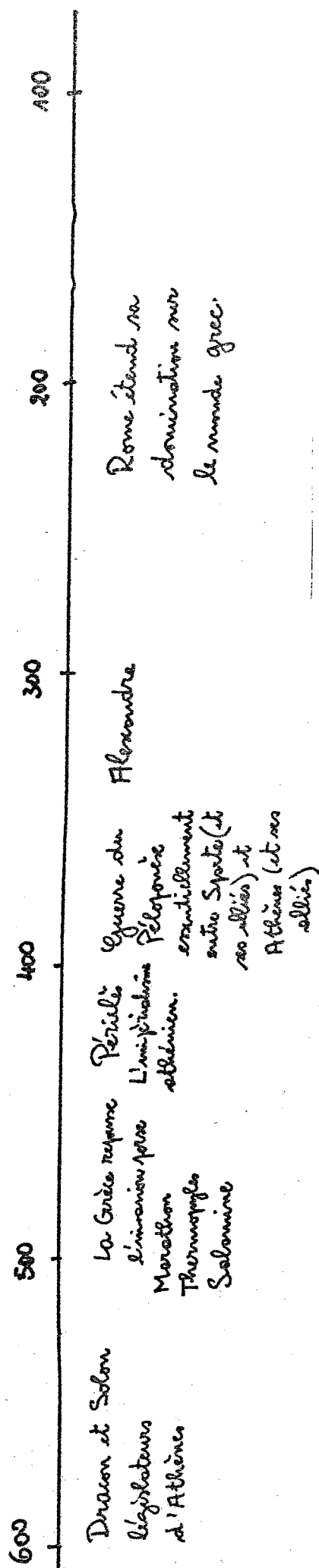
Ordre chronologique de succession
des listes mathématiques

- ① Les colonies: Ionie, Grande Grèce
- ② Grèce
- ③ Alexandrie.

Quelques

points de repère

chronologiques.



I - LE " MIRACLE GREC "

Du VI^e au III^e siècle avant notre ère fleurissait en Grèce et dans les régions du monde méditerranéen sous influence grecque une civilisation dont les réalisations intellectuelles, politiques et même militaires ont souvent été célébrées. Parmi celles-ci, il y en a toutefois deux qui nous semblent mériter une attention particulière :

- la réalisation d'une démocratie de citoyens

- la découverte et le développement d'une méthode de pensée, le raisonnement mathématique, qui permet à partir d'un petit nombre d'hypothèses de départ (les axiomes) d'obtenir une foule de résultats (les théorèmes) qui en découlent logiquement sans en être pour autant des conséquences triviales ; en ce sens que même l'objet des théorèmes (sans même parler de leur énoncé exact) est à la simple vue des axiomes impossible à prévoir : comment deviner à partir des axiomes de la géométrie euclidienne qu'on pourra trouver un résultat concernant la somme des angles intérieurs d'un triangle.

En architecture, en sculpture, en peinture, en musique*, en littérature, d'autres civilisations, telle la civilisation égyptienne par exemple, ont produit des oeuvres certes bien différentes en caractère (on y revient plus loin) de celles de la Grèce, mais ne dénotant pas de saut qualificatif aussi net qu'en ce qui concerne les deux domaines précédents. En effet si l'Egypte pharaonique a certes connu (au cours de chacun des trois empires), spécialement dans ses villes, l'avènement d'un droit privé individuel**, le gouvernement est toujours resté aux mains du pharaon (incarnation du fils du dieu Amon-Râ) et du clergé. On s'est demandé si les mathématiques utilitaires et plus ou moins empiriques des Egyptiens (ou des Assyriens) telles qu'elles nous sont connues par divers papyrus (papyrus de Rhindt en particulier) ne seraient pas simplement des versions vulgarisées de connaissances mathématiques plus élaborées, développées et gardées secrètes par les prêtres.

* Fort peu de tableaux ou de morceaux musicaux nous étant parvenus nous ne pouvons guère juger de ces deux domaines.

** La famille était monogame et reposait sur l'égalité des époux. Le testament était libre et les règles successorales les mêmes pour les filles que pour les garçons. Ajoutons que la justice était confiée à des tribunaux de notables présidés par les gouverneurs des provinces.

A vrai dire, n'y a-t-il pas une contradiction dans les termes entre la notion même d'une mathématique déductive et la signification mystique qu'on lui accorderait ? Une des questions principales dont nous cherchons la réponse sera d'ailleurs justement pourquoi le pouvoir politique, et le cas échéant les mathématiques, n'ont pas été en Grèce monopolisés par le clergé et une caste de dignitaires.

* * *

*

II - REPLACER LES MATHS DANS LEUR CONTEXTE

Ecrire une histoire des mathématiques ne sera pas notre propos. De multiples livres d'histoire des mathématiques retracent cette période. Mais bien peu de ces ouvrages se soucient de replacer les mathématiques dans le contexte culturel, politique, social ou économique de l'époque. C'est précisément ce que nous voudrions faire ici. La tâche, bien sûr, n'est pas facile. Tout d'abord à cause des difficultés propres au sujet. Il est des parties des mathématiques qui se sont développées en liaison avec des nécessités pratiques*. Ce n'est pas le cas, semble-t-il, de la plus grande part des maths grecques. Néanmoins, les mathématiques ne sont pas que la production individuelle d'un mathématicien génial. Même indépendamment de tout objectif utilitaire, elles constituent aussi une production sociale. Le mathématicien en effet doit commencer par apprendre les maths (rôle de l'enseignement) ; son goût pour cette discipline se sera développé sous l'effet d'incitations sociales multiples (place accordée aux mathématiques dans l'ensemble culturel de l'époque) ; il ne travaille pas seul mais est en relation par ses lettres** ou ses voyages avec des collègues (rôle du milieu scientifique de l'époque) ; enfin l'ampleur de son travail dépendra en partie de son statut social, par exemple à l'époque hellénistique (c'est-à-dire après les conquêtes d'Alexandre) de l'intérêt et du soutien que lui accorde le prince.

* La trigonométrie circulaire et sphérique a été développée par un astronome d'Alexandrie, Hipparque, en vue du repérage des étoiles. Plus près de nous le calcul différentiel fut, dès son invention, appliqué à des problèmes astronomiques (Newton) et militaires (contribution d'Euler à l'artillerie par exemple, qu'on peut trouver dans l'ouvrage "Nouveaux principes d'artillerie").

** Une partie de la correspondance scientifique d'Archimède nous est parvenue.

Nous commencerons par examiner ces divers aspects. Bien sûr, et c'est ce qui complique encore notre tâche, nos renseignements concernant la vie et le statut social des mathématiciens grecs sont extrêmement incomplets : la carte ci-jointe énumère un certain nombre de mathématiciens. Seuls leurs noms nous sont en général parvenus : nous ne savons pas comment ils vécurent et même leur contribution mathématique ne nous est souvent connue que de façon indirecte par une remarque ou un commentaire fait un siècle ou deux après, par Euclide, Archimède ou Appollonius par exemple.

La tournure d'esprit des hommes de cette époque conditionne aussi leur production intellectuelle et la psychanalyse peut nous apprendre des choses intéressantes à ce propos. Mais, là encore, nous devons hélas nous contenter d'indications assez vagues.

* *
* *

III - LA BASE SOCIALE

a) L'enseignement

On sait peu de choses sur la place qu'occupaient les maths dans l'enseignement à Athènes par exemple. La cité n'intervenait pas dans l'éducation, qui était une affaire privée. Mais la natation, nécessaire pour ce peuple de marins, les exercices gymniques, préparation au rôle de soldat, la lecture, pour pouvoir prendre connaissance des lois qui dès le VII^e siècle prirent une forme écrite (souvent gravée sur un monument public par exemple) étaient jugés indispensables à la formation d'un citoyen. Les jeunes gens aisés poursuivaient souvent des études jusqu'à 18 ans (à cet âge ils partaient pour un service militaire de 2 ans) dans les écoles "philosophiques" où toutes les matières étaient enseignées. Et si l'on en croit Platon*, à ce niveau les maths étaient considérées comme la discipline formatrice de l'esprit par excellence :

"Les personnages les plus importants de notre Etat auront à apprendre l'arithmétique, non en amateurs, mais en développant au contraire cette étude jusqu'à ce que le concept des nombres leur apparaisse clairement... L'arithmétique a un rôle éminemment formateur, en conduisant l'esprit à raisonner sur des nombres abstraits et à se défier des preuves visibles et tangibles".

La République

* Platon lui-même avait une bonne connaissance des maths de l'époque, sans y avoir cependant fait de contribution importante, semble-t-il.

On peut donc penser que dans ces écoles, les maths tenaient une place importante. Si on n'a jamais retrouvé de manuel ou de traité, c'est sûrement parce que l'enseignement était oral. C'est d'ailleurs en partie cette caractéristique qui explique d'une part que les maths grecques aient pu prendre cette forme algébrico-géométrique qu'on leur connaît et, d'autre part, la difficulté de sa transmission à partir du moment où la chaîne de l'enseignement oral était interrompue. En effet, comme ils n'avaient pas introduit les nombres irrationnels dans leur arithmétique, ils étaient constamment obligés de faire un détour par des arguments géométriques. Ces longues démonstrations (qu'on considère celles d'Appollonius par exemple) où chaque longueur est représentée par deux lettres qu'on doit d'abord chercher sur la figure, exigent de notre part beaucoup d'attention et le plus souvent le fil nous en reste caché. Toutes ces difficultés n'existent pas dans le cas d'une leçon orale où on peut montrer les longueurs avec les doigts et indiquer en quelques mots l'idée principale de la démonstration. Les manuels d'Euclide et d'Appollonius devront ainsi être augmentés de nombreux commentaires pour être utilisables. Cette tendance se révèle déjà chez Pappus d'Alexandrie, qui vécut au III^e siècle après J.-C., et s'épanouit au Moyen-Age : la traduction la plus utilisée des *Eléments* d'Euclide donnait à la place des démonstrations formelles de la version originale, des commentaires sur la marche à suivre*.

b) L'intérêt social pour les mathématiques

A l'époque classique, la culture fut en Grèce l'affaire de tous les citoyens. Non seulement les divers jeux panhelléniques (ouverts donc à toutes les cités) que ce soient les jeux Olympiques, Isthmiques (se déroulant près de Corinthe) ou Pythiques (ayant lieu près de Delphes) comportaient des concours musicaux poétiques et dramatiques ouverts en principe à tous les citoyens**, mais de plus

* De plus, ces mêmes traductions montrent que la définition axiomatique que donne Eudoxe du rapport de deux grandeurs (voir le paragraphe IV 3), définition qui est la clef de voûte de tout l'édifice des Grecs, n'est pas comprise du tout au Moyen-Age. Ainsi les mathématiciens de la Renaissance pourront développer l'algèbre sans s'embarrasser de la rigueur et des scrupules des Grecs; comme quoi la science peut, elle aussi, reculer pour mieux avancer.

** Même si les cités n'envoyaient que ceux qui seraient sûrs de ne pas être ridiculisés.

chaque cité organisait de tels concours. C'est ainsi qu'à Athènes au festival de Printemps 28 pièces étaient retenues pour des représentations comportant, outre les acteurs, un grand nombre (plus d'une centaine) de choristes et de danseurs. On estime qu'en un siècle au moins 2 000 pièces furent sélectionnées donc représentées ainsi que 6 000 oeuvres musicales. Et à ces représentations participaient plus de 2 000 Athéniens, proportion importante puisque la population devait être de l'ordre de 30 000 citoyens, sans compter les esclaves.

On ne sait pas si les mathématiques eurent une vogue comparable ; on peut en douter car d'une part l'austérité du sujet ne s'y prête guère, et d'autre part leur développement fut assez tardif, plutôt postérieur en tout cas à l'époque la plus florissante d'Athènes allant de Solon à Périclès. Mais nul doute qu'un milieu aussi créatif ait grandement favorisé leur développement.

c) Le statut social des mathématiciens

Si les architectes, les potiers, les peintres, les sculpteurs pouvaient vivre du produit de leur art, il n'en était pas de même pour les philosophes et les mathématiciens. Cependant, comme on l'a vu, durant toute la période classique, les arts et les sciences étaient pratiqués par la plupart des gens aisés. La prospérité générale leur permettait une vie facile. Ainsi le matin allaient-ils par exemple inspecter leur domaine (ou même éventuellement y travailler) dans les proches environs d'Athènes, mais l'après-midi et la soirée pouvaient être consacrés à la discussion, à la vie culturelle ou au gymnase.

Plus tard, sous l'influence des conquêtes d'Alexandre les grands courants commerciaux débordèrent largement le cadre étroit de la mer Egée qui en avait été jusqu'alors la plaque tournante et s'étendirent des régions orientales de l'Empire Séleucide jusqu'à Rome. Athènes perdit ainsi en partie son rôle commercial au profit de ports comme Rhodes ou Alexandrie situés aux débouchés des routes caravanières venant de l'Orient. Déclin que la conquête romaine et le pillage systématique qui l'accompagne, surtout au début, ne fit qu'accentuer*. Il semble que la vie culturelle se concentra alors dans l'entourage des souverains et des gouverneurs (et tout spécialement à Alexandrie).***

Voici donc esquissé le cadre dans lequel les maths grecques ont pu prospérer. Mais quels sont les facteurs qui ont contribué à leur naissance ?

* * *

* Ainsi un historien athénien^{du 1^{er} siècle après JC} nous rapporte les réactions admiratives de ses compatriotes à la vue des bateaux chargés du transport de blé d'Alexandrie à Rome. Ceux-ci avaient dû se détourner de leur route habituelle à cause d'une tempête. Les Athéniens n'avaient jamais vu de bateaux aussi grands, eux qui quelques siècles plus tôt étaient des maîtres en matière de construction navale.

** Evolution qui apparaît bien dans la localisation des écoles mathématiques (voir carte)

IV - L'EMANCIPATION DES GRECS. LA NAISSANCE DE LA DEMOCRATIE ET DES MATHS

On peut dire que les mathématiques sont nées avec l'idée d'égalité et de justice dans le cadre d'une démocratie politique.

1 - Que nous apprend la psychanalyse freudienne

L'enfant, élevé par des adultes, doit supporter leur caractère. S'il s'insurge, il est puni ; s'il quitte le domicile, il est ramené de force. Comme c'est le père qui joue le rôle principal dans la limitation de ses instincts, en particulier en s'opposant aux sentiments de tendresse qu'il porte à sa mère, l'enfant se met à le haïr et en même temps le jalouse et voudrait s'identifier à lui*. Mais comme il ne peut liquider ses sentiments en les extériorisant, un processus de refoulement se produit peu à peu qui en atténuant cette révolte et cette souffrance lui rend l'existence plus supportable. Cependant arrivé à l'âge adulte d'une part ces mécanismes nés de l'enfance persévéreront en un sentiment permanent de crainte et de dissimulation, d'autre part le conflit qui était originellement entre l'enfant et le monde extérieur s'intériorise en un conflit avec cette puissance refoulante (instance inconsciente que les psychanalystes appellent le sur-moi). L'observation clinique montre que ce conflit se traduit par un manque d'initiative dans la vie car chaque acte d'indépendance réveillerait, en rompant le schéma d'obéissance hérité de l'enfance, cette haine endormie. De plus, il peut se produire des transferts, où le malade reporte sa haine sur des personnes ou sur des objets sans rapport direct avec le conflit initial, en des pensées et des actes obsessionnels, actes dont il ne comprend pas la raison mais qu'il ne peut s'empêcher d'accomplir.

Cette évolution peut se produire dans n'importe quelle famille mais on imagine assez bien qu'elle sera d'autant plus marquée que l'autorité paternelle sera lourde et le cadre familial rigide. Dans les tribus primitives où la division du travail est inexistante ou rudimentaire l'autonomie individuelle est très faible et les sentiments collectifs sont très forts : le conflit individuel que nous venons de décrire prend alors l'allure d'un phénomène social. Et les conduites obsessionnelles évoquées plus haut deviennent des rites ou des interdits qui protègent le corps social contre le déchaînement des conflits

* Cela, du moins, pour un petit garçon. Pour une fille il faudrait transposer cette explication à la mère. Mais il semble que pour ses effets sociaux (chez les peuples primitifs) ce soit surtout le conflit masculin qui ait joué.

accumulés. Par exemple le fils aurait aimé s'emparer des femmes du père ou du chef de clan ; l'institutionnalisation de l'exogamie désamorce cette tentation et du même coup le conflit résultant de son non accomplissement. Phénomène analogue aux transferts, la pensée primitive reporte ses conflits sur les objets (animaux, arbres, ciel) qui l'entourent, les chargeant ainsi d'une signification émotive.

En bref, l'inhibition de l'initiative, la dissimulation, le report sur les phénomènes naturels des conflits affectifs, la fixation d'une part importante de l'énergie sociale et individuelle sur des pratiques rituelles empêchent toute vision scientifique du monde et l'épanouissement des facultés créatrices.

2 - Le cas de la Grèce

a) Une société patriarcale oppressante.

Il semble qu'entre le Xe et le VIIe siècle avant J.-C., la Grèce (du moins la Grèce continentale) ait connu un régime social de type féodal et un régime familial patriarcal. L'autorité du chef de clan, qui est aussi le prêtre de la religion familiale aux rites méticuleux, était particulièrement pesante. Il rend la justice de façon souveraine. Pour tous les fils (sauf éventuellement pour l'aîné), la seule perspective était l'obéissance et la crainte. Comme cette époque se caractérise par un arrêt des échanges (une sorte de Moyen-Age grec en somme) le clan (ou, comme on dit dans le cas de la Grèce, le génos) vivait en autarcie. Ainsi, même le fruit du travail individuel revenait au génos. La seule issue possible était l'immigration pour ceux qui ne supportaient pas cette contrainte ou que le génos ne pouvait nourrir par suite de récoltes insuffisantes. Cela explique que des pays de colonisation comme l'Ionie ou la Grande Grèce (c'est-à-dire l'Italie du Sud) se développèrent plus rapidement que la Grèce elle-même* : à la fois sur le plan économique car les colonies s'implantaient souvent sur une côte ce qui facilitait les échanges**, et sur le plan culturel car d'une part la possibilité des échanges y amena peu à peu un relâchement du cadre rigide du génos et d'autre part c'est un trait propre aux émigrants (qu'on pense aux émigrants du XVIIIe et XIXe siècle) de rechercher une autonomie accrue. Avec le développement des échanges cette évolution se produisit aussi peu à peu en Grèce. La généralisation de la monnaie permit au fils d'échanger

* L'Odyssée est un reflet des mœurs plus libérées de l'Ionie. Ainsi Agamemnon déclarant : "J'entends qu'on me rende justice comme à un homme et non qu'on m'honore comme un dieu".

** Sauf quelques exceptions, ces colonies furent cependant essentiellement agricoles et non pas des comptoirs commerciaux comme celles des Phéniciens.

son travail contre une somme d'argent et non contre une tête de bétail par exemple qui allait automatiquement grossir le patrimoine commun. Certains domaines furent partagés ou loués par morceaux à des fermiers.

L'apparition de la monnaie est aussi suivie de peu par une crise sociale : aux cultivateurs qui avaient emprunté on demande un remboursement en monnaie au lieu des denrées habituelles, et dans l'impossibilité de s'acquitter ils étaient réduits en esclavage car les prêts avaient la personne même de l'emprunteur pour gage.

Mais peu à peu c'est la cité qui va jouer le rôle moteur qui échappe peu à peu aux structures féodales.

b) Quelle évolution ?

D'une telle évolution, l'histoire a de multiples exemples : mis à part notre Moyen-Age, elle se produisit à Rome au III^e siècle avant J.-C. et en Egypte à plusieurs reprises : à l'avènement de chaque empire où elle se traduisait par une restauration du pouvoir central s'appuyant sur les villes du delta. On voit donc que cette évolution peut prendre des formes multiples suivant les conditions géographiques ou sociales initiales. Sans prétendre ici fournir une explication de l'évolution grecque, donnons quelques éléments plausibles de réponse.

En Egypte, il faut constamment construire et entretenir les ouvrages hydrauliques servant à retenir l'eau et le limon. Il faut aussi édicter des règlements pour la consommation d'eau qui est rationnée. La prospérité est à ce prix. De plus, l'uniformité du pays, la facilité des échanges utilisant le Nil*, favorisaient l'établissement d'une religion commune. L'éclosion d'une religion où le Pharaon, symbolisant le fils du dieu Amon-Râ, assume tous les désirs inconscients de son peuple (par exemple il vit incestueusement avec sa soeur) et par là-même l'en libère, fournit donc une solution valable aux problèmes économiques et socio-psychologiques de l'Egypte ancienne, de pair avec le système politique hiérarchisé et centralisé.

c) L'évolution de la Grèce

La Grèce, par contre, est un pays montagneux où les communications sont difficiles, ce que reflète la diversité des cultes religieux. L'agriculture peut fort bien y être une affaire individuelle. Par contre ses rendements restent médiocres, d'où les départs périodiques vers les colonies, l'exposition (c'est-à-dire l'abandon) des enfants (voire plus tard la tolérance de l'homosexualité)

* du moins jusqu'à la première cataracte ; or la frontière de l'ancien Empire s'arrête justement à cette première cataracte alors que la frontière du Moyen Empire s'arrête à la 2^e et celle du Nouvel Empire à la 4^e.

et l'impérieuse nécessité de l'importation de céréales. Contrairement à l'Egypte où la densité de la population sur les bonnes terres alluviales peut être importante, en Grèce elle reste toujours faible. Comment concevoir la démocratie directe que pratiqueront les Athéniens lorsqu'on a affaire à des centaines de milliers d'individus (au lieu des quelques dizaines de milliers de citoyens que compte Athènes).

Mais la différence essentielle entre le cas grec et les cas égyptiens ou romains (ou français !), ne faut-il pas la rechercher dans les échanges maritimes que les Grecs entretenaient avec leurs colonies, principalement pour leur approvisionnement en céréales*. Ainsi se trouvaient réunies les conditions favorables à l'apparition d'une classe moyenne d'artisans : potiers, travaillant pour l'exportation, charpentiers et tisserands pour la construction de navires. Fort de l'appui de cette classe moyenne et utilisant le fait que le centre de décision s'était déplacé de la campagne dans la cité, les dirigeants qui se succédèrent à partir de Dracon en 600 avant J.-C. (Dracon, Solon, Pisistrate, Clisthène) développèrent le droit individuel et mirent fin au règne du génos. Dracon, afin de retirer aux familles le droit de vengeance collectif, édicta un code fort sévère (d'où le qualificatif de draconien) pour leur assurer que justice sera faite. Il remplace ainsi la justice arbitraire du génos par celle de tribunaux étrangers à la querelle qui ne rendront leur jugement que sur la base des faits et des lois en vigueur. Il limite (et Solon après lui) le faste des cortèges funèbres, le nombre d'animaux sacrifiés, les richesses déposées dans les tombes, marquant par là-même le recul du culte familial des ancêtres.

Solon interdit de prendre une personne en gage sur un emprunt ; chaque citoyen est ainsi assuré de garder, quoi qu'il arrive, la libre disposition de soi-même.

Bien sûr, la religion subsistait, continuant de fournir aux conflits socio-psychologiques un indispensable exécutoire. Mais l'aspect important consistait dans la séparation du pouvoir politique et religieux (contrairement au cas égyptien), ce qui permit une "humanisation" progressive de cette religion, restreignant ainsi sa portée.

* Les Athéniens (mais aussi les Corinthiens) devinrent d'ailleurs véritablement un peuple de marins. Leurs chantiers navals et leurs équipages étaient réputés : que l'on songe à la bataille de Salamine. Pendant la guerre du Péloponèse, Athènes négligea d'ailleurs quasiment son armée de terre, se contentant, une fois assiégée, de se faire ravitailler par sa flotte.

3 - Le développement des philosophies, de la logique, des mathématiques

Libéré de l'autorité pesante du génos, confirmé dans ses droits individuels par les lois (lois qui loin d'être immuables sont susceptibles de modifications à l'instigation de chaque citoyen), participant à l'administration de la cité, le citoyen avait un rôle actif à jouer. Il en fut de même tout naturellement dans le domaine des idées. Ce fut l'éclosion d'une multitude de métaphysiques plus ou moins naïves et contradictoires. Bien vite, le besoin se fit sentir de règles permettant sur la base d'hypothèses données de discerner le vrai du faux, de même que les membres d'un tribunal* sur la base des faits invoqués rendent leur verdict selon les lois en vigueur. Ce fut la logique d'Aristote (vers 350 avant J.-C.)

Les mathématiques n'avaient pas attendu cette époque tardive pour commencer à se développer. Au début, leur développement fut favorisé par les contacts que la Grèce entretenait avec des pays comme l'Egypte** qui avaient dans le domaine du calcul une longue tradition.

Ce n'est cependant qu'à partir de cette époque, grâce à Eudoxe de Cnide en particulier, qu'elles connurent un développement systématique et régulier. Auparavant les géomètres grecs étaient venus buter sur deux obstacles : le point géométrique ponctuel et les irrationnels. On peut considérer qu'il leur fallut près de deux siècles (de l'époque de Pythagore à celle d'Eudoxe) pour les surmonter.

Pour les Pythagoriciens un point géométrique devait avoir une certaine dimension. C'est pour réfuter cette conception que Zénon invente les deux arguments de la flèche qui ne quitte pas son point de départ et d'Achille ne rattrapant pas la tortue. On parle souvent des paradoxes de Zénon. Ce ne sont des paradoxes que pour nous qui ne songerions pas à remettre en cause la notion de point géométrique sans dimension.

Toute la construction des Pythagoriciens reposait aussi sur le postulat implicite de la commensurabilité de deux grandeurs de même espèce (autrement dit que leur rapport est un nombre rationnel). Ainsi la démonstration que la diagonale d'un carré et son côté sont incommensurables ébranla-t-elle tout cet édifice. Ce fut Eudoxe qui, par une définition axiomatique dont nous avons déjà parlé, contourna la difficulté.

* Rappelons qu'en Grèce, les juges n'étaient pas des gens de métier mais des citoyens élus ou désignés par le sort, de sorte que chaque citoyen était appelé à faire l'expérience de la délibération et du verdict.

** De façon générale, le fait pour la Grèce d'avoir été, en particulier par l'intermédiaire de ses colonies, en relation constante avec les civilisations orientales favorisa son essor culturel. Bien différent fut le cas de Rome qui ramena à la suite de campagnes militaires les valeurs de ces civilisations pêle-mêle avec son butin de guerre.

En effet, si on examine les démonstrations où intervient la notion de rapport de deux grandeurs, on s'aperçoit que le postulat des Pythagoriciens n'est pas nécessaire ; il suffit de savoir :

1° ce que signifie l'égalité ou l'inégalité de deux rapports A/A' et B/B'

2° de pouvoir définir les opérations fondamentales (addition, multiplication) sur ces rapports.

Une fois le 1° résolu, le 2° est facile à traiter, par voie géométrique par exemple. Pour ce qui est du 1°, Eudoxe pose :

- Un rapport A/A' de deux grandeurs de même espèce sera considéré comme $>$ (ou plus petit) que le rapport m/m' de deux entiers si $m'A \gtrless mA'$, inégalité qui ne fait intervenir que des additions de grandeurs et donc réalisables géométriquement.

- Un rapport A/A' sera dit plus grand qu'un rapport B/B' s'il existe un rapport de deux entiers m/m' tel que : $A/A' > m/m' > B/B'$.

- Ces rapports A/A' et B/B' sont dits égaux si aucun des deux n'est plus grand que l'autre.

Grâce à cette conception géniale toutes les démonstrations des Pythagoriciens purent être rendues rigoureuses par un procédé standard.

4 - La place des mathématiques dans la culture grecque

Remarquons que les caractéristiques des maths grecques de l'époque classique c'est-à-dire pour l'essentiel de la géométrie euclidienne se retrouvent dans d'autres activités culturelles.

a) Elle n'étudie que des formes simples, qu'on peut construire à l'aide de la règle et du compas. Ce caractère de simplicité se retrouve dans l'architecture : qu'on compare par exemple un temple grec à une cathédrale gothique avec ses flèches, ses clochetons, ses tours, ses contreforts ; dans la sculpture aussi, où le modèle essentiel est le corps humain nu.

b) Elle est statique. Les Grecs n'ont guère étudié les transformations du plan ou de l'espace. Caractère qu'on retrouve par exemple dans les tragédies où l'action est souvent fort limitée : les faits essentiels sont présentés au départ puis on assiste à leur développement*.

* La conception de la cité idéale d'un Platon est aussi parfaitement statique ; mais il s'agit peut-être là plutôt d'une déformation individuelle.

c) Elle ne considère que des figures finies. Les Grecs ont toujours eu une appréhension de l'infini : le mouvement le plus simple pour eux n'est pas le mouvement rectiligne uniforme, mais le mouvement circulaire uniforme. De même leurs temples ont une forme ramassée et peuvent facilement être embrassés d'un seul regard. Contrairement aux cathédrales gothiques dont les tours s'élançant vers le ciel incitent à la contemplation de l'infini ou à une pyramide égyptienne qui pointe vers les étoiles.

5 - Les mathématiques de la période alexandrine

Alexandrie fut fondée à la fin du III^e siècle avant J.-C. L'intention d'Alexandre avait été d'en faire une ville cosmopolite et un centre culturel et les Ptolémée en firent en effet un grand centre commercial et culturel. Outre le port, on y trouvait tout ce qui est nécessaire à la vie culturelle et à l'agrément* : bains, parcs, théâtres, temples, jardins zoologique et botanique, bibliothèques.

Il y eut une floraison d'instruments mécaniques : poulies, plans inclinés, engrenages et il s'ouvrit même des écoles de mécanique. Beaucoup d'inventions restèrent cependant des curiosités utilisées en particulier par le clergé pour impressionner les fidèles : les portes du temple s'ouvrent automatiquement, une machine à vapeur dissimulée sous l'autel anime les statues qui bénissent la foule. On utilise même des automobiles à vapeur lors de la grande parade religieuse annuelle.

Les mathématiques suivirent tout naturellement ce mouvement et prirent avec Archimède un aspect plus quantitatif : calcul de volumes et de surfaces de formes diverses. Mais la rigueur grecque restait de règle.

Il fallut attendre plus de 2 000 ans pour voir les maths retrouver cette rigueur, avec laquelle les mathématiciens trouvèrent entre-temps bien des accommodements. Qu'on songe par exemple à Abel écrivant au début du XIX^e siècle :

"Toutes mes forces seront employées à porter la lumière dans la monstrueuse obscurité qui règne maintenant sans conteste dans l'analyse... Ce qu'il y a de pire, c'est qu'elle est traitée sans la moindre rigueur. On ne trouve que bien peu de propositions dans la haute analyse qui soient démontrées d'une manière incontestablement rigoureuse. Partout on rencontre la déplorable habitude de conclure du particulier au général et il est extrêmement remarquable qu'avec cette manière de faire on n'aboutisse que rarement à ce qu'on appelle des paradoxes".

* Rappelons cependant que ce luxe reposait sur l'exploitation forcenée et systématique de l'arrière-pays par ces rois d'origine grecque qu'étaient les Ptolémée.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 Jacques Pirenne.- Les grands courants de l'histoire universelle t. I
- 2 Taton Histoire des Sciences.
- 3
- 4 Kline Mathematics in western Culture
Mathematics : a cultural Approach.
- 5 Fergusson Greek Imperialism.
- 6 Casson Les marins de l'antiquité.
- 7 R. de Saussure Le miracle grec.
- 8 Mumford La cité à travers l'histoire.
- 9 G. et M.F. Racht Dictionnaire de la civilisation grecque.
- 10 Bjerknes La vie et l'oeuvre de Niels Henrik Abel.
- 11 Murdoch The Medieval Euclid Revue de Synthèse n° 49-52
- 12 Van der Waerden Der Verfall der griechischen Mathematik
Pyramide octobre 1952
- 13 Dieudonné Bulletin de l'association Guillaume Budé juin 1951
- 14 Lévy L'économie antique.
- 15 French The growth of the Athenian Economy.