

Chapitre II

La notion de REPRESENTATION d'un groupe.

Considérons un atome d'hydrogène et intéressons nous aux fonctions d'onde de l'unique électron.

Celui ci est placé dans le potentiel coulombien V du noyau, qui est à symétrie sphérique; et la fonction d'onde qui le représente dans l'état d'énergie E s'obtiendra en résolvant l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi = E \Psi$$

Dire que le problème est à symétrie sphérique signifie que le système physique considéré est invarient dans une rotation autour du noyau. Nous pouvons donc nous attendre à ce que la fonction d'onde "hérite" également de cette invariance. Mais sous quelle forme (mathématique) en héritera-t-elle ?

Le physicien ne peut donc se contenter de répertorier les différentes symétries existant dans la nature; il doit surtout chercher comment elles se traduisent dans les différents êtres mathématiques (ici $\Psi(\vec{r})$) intervenant dans les théories physiques.

En langage mathématique, cela signifie qu'on ne peut se contenter à l'étude des groupes (du groupe des rotations ici par exemple), qu'il faut chercher à établir un lien entre ces groupes et des collections d'êtres mathématiques (ici de fonctions) complètement différents et à voir comment les propriétés des groupes seront représentées dans ces collections.

I. La notion d'homomorphisme et d'isomorphisme de groupe.

Ce paragraphe pourrait s'intituler de façon plus familière :

" Au' l'on voit comment les mathématiciens évitent les tâches répétitives "

A. Comment apparaît l'idée d'isomorphisme et d'homomorphisme.

1. Premier exemple

a) Considérons le groupe G_1 formé par les 4 nombres $\{1, i, -1, -i\}$ muni de l'opération multiplication des nombres complexes. Vérifiez qu'il s'agit bien d'un groupe. Sa table de multiplication est facile à établir :

	G_1			
	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

b) Considérons le groupe formé des rotations planes d'angle : $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. muni de l'opération composition des rotations. Vérifiez qu'il s'agit bien d'un groupe. Sa table de multiplication est facile à écrire :

	R_0	$R_{\pi/2}$	R_π	$R_{3\pi/2}$
R_0	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$R_{\pi/2}$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	0
R_π	π	$3\pi/2$	0	$\pi/2$
$R_{3\pi/2}$	$3\pi/2$	0	$\pi/2$	π

Remarquons que ces deux groupes ont la même table de multiplication et comme

défini entièrement un groupe, nous avons bien envie de dire que les deux groupes sont identiques. Toutefois, ils sont composés d'éléments de nature bien différente. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que si nous définissons une application de G_1 dans G_2 :

$$\begin{array}{ccc} 1 & & R_0 = J(1) \\ i & \xrightarrow{J} & R_{\pi/2} = J(i) \\ -1 & & R_{\pi} = J(-1) \\ -i & & R_{3\pi/2} = J(-i) \\ \in G_1 & & \in G_2 \end{array}$$

on aura:

$$J(g_1 g'_1) = J(g_1) \circ J(g'_1). \quad (1).$$

pour $g_1 = -1$ et $g'_1 = i$ on aura par exemple:

$$J(g_1 g'_1) = J(-1 \cdot i) = J(-i) = R_{3\pi/2}.$$

$$J(g_1) \circ J(g'_1) = J(-1) \circ J(i) = R_{\pi} \circ R_{\pi/2} = R_{3\pi/2}.$$

2. Deuxième exemple

L'exemple précédent vous aura probablement semblé plutôt banal et connu de fil blanc en ce sens que la table de multiplication des rotations ne fait que reproduire celle des arguments des nombres complexes correspondants. Le lien entre les deux groupes était donc à priori évident. Celui que nous allons donner maintenant est moins trivial.

a) Considérons l'ensemble des 6 fonctions:

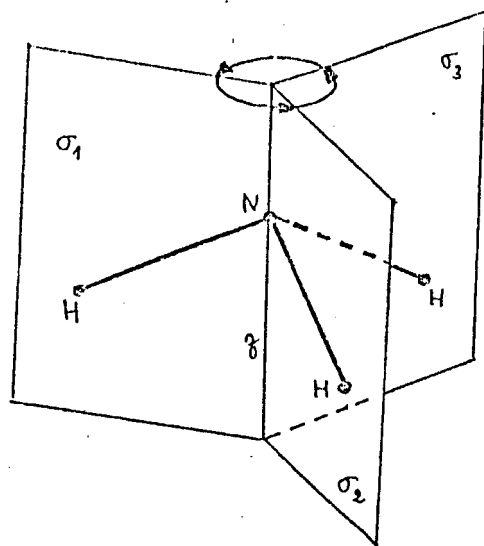
$$\begin{array}{lll} I(x) = x & A(x) = 1/(1-x) & B(x) = 1-1/x \\ C(x) = 1/x & D(x) = 1-x & E(x) = x/(x-1). \end{array}$$

Muni de l'opération composition des fonctions cet ensemble forme un groupe G_7 .

Vérifiez le, ce qui vous donnera en même temps la table de multiplication:

	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

b) Nous considérons une molécule d'ammoniac NH_3 1.



1 Molécule d'ammoniac.

Le groupe de symétrie de cette figure comprend les transformations suivantes :

1° la transformation identique I

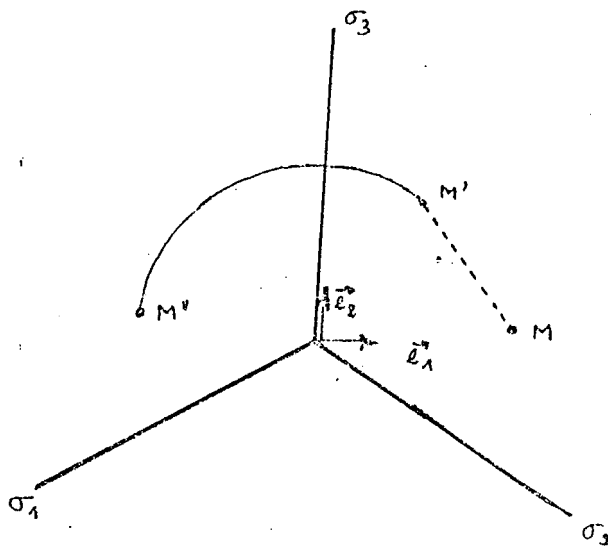
2° 3° les rotations d'axe z et d'angle $2\pi/3$, $4\pi/3$: C_3 , C_3^2

4° 5° 6° les symétries par rapport aux plans σ_1 , σ_2 , σ_3 .

En faisant une vue de dessus de 1 nous pouvons aisément établir la table de multiplication de ce groupe.

Par exemple, sur la figure nous voyons que : $C_3 \sigma_1(M) = C_2(M') = M'' = \sigma_3(M)$.

I	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
I	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
C_3	C_3^2	I	σ_3	σ_1	σ_2
C_3^2	I	C_3	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_2	σ_3	I	C_3	C_3^2
σ_2	σ_3	σ_1	C_3^2	I	C_3
σ_3	σ_1	σ_2	C_3	C_3^2	I



Nous pouvons aussi raisonner avec les matrices de ces applications. Ainsi la matrice

de σ_1 est:

$$\begin{matrix} & \sigma_1(\vec{e}_1) & \sigma_1(\vec{e}_2) \\ \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \end{matrix} = \sigma_1$$

la matrice de C_3 est:

$$\begin{matrix} & C_3(\vec{e}_1) & C_3(\vec{e}_2) \\ \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} = C_3$$

Or:

$$\begin{matrix} & \vec{OM}'' \\ \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \alpha_1'' \\ \alpha_2'' \end{bmatrix} \end{matrix} = [C_3] \begin{matrix} & \vec{OM}' \\ \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{bmatrix} \end{matrix}$$

en vertu de ce que nous avons dit en rappel au chapitre 1 III A3.

Ainsi:

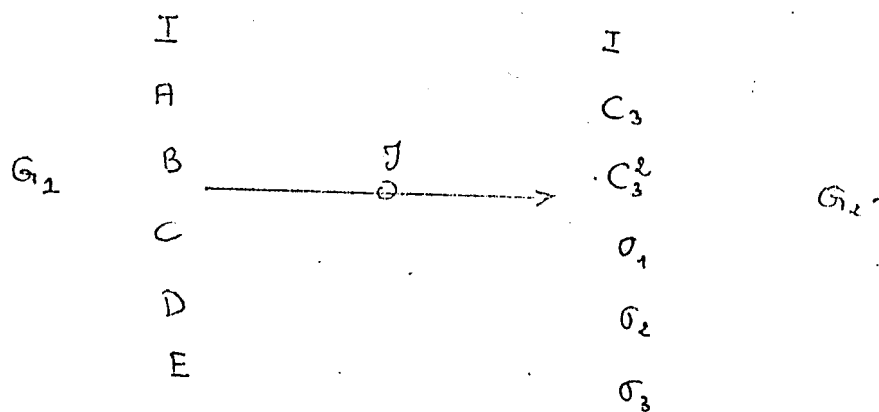
$$\begin{bmatrix} \alpha_1'' \\ \alpha_2'' \end{bmatrix} = C_3 \sigma_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

c.à.d. que la matrice de l'application produit est simplement le produit des matrices.

Effectuant ce produit on obtient: $C_3 \sigma_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
matrice dont on voit de suite qu'elle correspond à σ_3 .

Ici encore, nous voyons que les tables de multiplication sont fondamentalement les mêmes.

ce que nous traduirons encore en disant que nous définissons une application de G_1 dans G_2 :



on aura: $J(g_1 \circ g'_1) = J(g_1) \circ J(g'_1)$ (1)

De façon générale lorsqu'entre deux groupes existe une bijection satisfaisant à une telle condition, on dit qu'ils sont isomorphes*, et par abus de langage on convient même souvent de les identifier l'un à l'autre.

3. Homomorphisme

Il peut aussi se produire qu'une relation telle que (1) ait lieu entre deux groupes qui n'ont pas le même nombre d'éléments.

Un exemple simple en est fourni en prenant pour G_1 le groupe, noté S_3 , des permutations de 3 objets et pour G_2 le groupe des éléments $\{-1, +1\}$ (muni de la multiplication)

Définissons l'application par:

$\begin{matrix} 1 \\ (1\ 2\ 3) \\ 1\ 2\ 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ (1\ 2\ 3) \\ 2\ 3\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ (1\ 2\ 3) \\ 3\ 1\ 2 \end{matrix}$	$\xrightarrow{\quad h \quad}$ $\circ$	$+1$
$\begin{matrix} 4 \\ (1\ 2\ 3) \\ 2\ 1\ 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5 \\ (1\ 2\ 3) \\ 1\ 3\ 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ (1\ 2\ 3) \\ 3\ 2\ 1 \end{matrix}$		-1

Il est facile de vérifier qu'on a bien: $h(g_1 \circ g'_1) = h(g_1) \circ h(g'_1)$

exemple: $h(g_1 \circ g'_1) = h\left(\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 2\ 3\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 1\ 3\ 2 \end{pmatrix}\right) = h\left(\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 3\ 2\ 1 \end{pmatrix}\right) = -1$

$h(g_1) h(g'_1) = h\left(\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 2\ 3\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot h\left(\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ 1\ 3\ 2 \end{pmatrix}\right) = (+1)(-1) = -1$

Dans ce cas, les tables de multiplication ne sont certes pas les mêmes:

* qui vient du grec "iso" qui signifie "identique" et "morphé" qui signifie "forme"

1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5
4	6	5	1	3	2
5	4	6	2	1	3
6	5	6	3	2	1

	+1	-1
+1	+1	-1
-1	-1	+1

on voit qu'il y a une similitude par blocs; on dit que les 2 groupes sont isomorphes*

4. Définition et propriétés élémentaires

a) Nous pouvons maintenant, pour conclure ce paragraphe, donner les définitions:

Def : Une application φ d'un groupe G_1 dans un groupe G_2 est un homomorphisme de groupe si on a:

$$\varphi(g_1 \cdot g'_1) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g'_1) \quad \forall g_1, g'_1 \in G_1$$

Les deux groupes sont alors dits homomorphes.

Si de plus φ est bijective, les deux groupes sont isomorphes.

b) Propriétés élémentaires.

On peut les résumer d'un mot en disant que φ transporte toutes les propriétés de G_1 dans G_2 .

Proposition 1

$\varphi(e_1)$ est l'élément neutre de G_2 .

En effet: $\varphi(g_1 \cdot e_1) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(e_1) = \varphi(g_1)$

$\varphi(g_1)$ est un élément g_2 de G_2 et de: $g_2 = \varphi(g_1) g = g_2$ résulte bien (par multiplication à gauche par g_2^{-1}) que $\varphi(e_1) = e_2$.

Le préfixe "homo" signifie justement semblable

$\varphi(g_1^{-1})$ est l'inverse de $\varphi(g_1)$

effet: $\varphi(g_1) \cdot \varphi(g_1^{-1}) = \varphi(g_1 \cdot g_1^{-1}) = \varphi(e_1) = e_2$

Si G_1 est sélien, G_2 l'est aussi, à condition que φ soit surjective.

La notion d'homomorphisme dans le contexte général des mathématiques.

Reprenons notre démarche du ch II B.

Ici encore, au début se trouve la notion d'application d'un ensemble dans un autre ensemble. Notion très générale qui recouvre celle d'opération et celle de fonction.

Si nous considérons maintenant une application entre deux ensembles munis d'une structure (structure d'ordre, structure topologique ou algébrique) on accordera une attention toute particulière aux applications qui préservent cette structure.

Ainsi pour la structure d'ordre, il faudra que: $a < a' \Rightarrow f(a) < f(a')$.

pour la structure topologique, il faudra que l'image par f de tout voisinage de x soit un voisinage de $f(x)$; on parle alors d'homéomorphisme (homéo vient d'un mot grec qui signifie également semblable) et c'est une notion capitale en topologie.

pour la structure algébrique, il faudra que: $a = ab \Rightarrow f(a) = f(a) f(b)$,
ce qui correspond bien à notre définition de l'homomorphisme.

Et à chaque fois que le mathématicien peut mettre en évidence entre deux ensembles une telle application h conservant la structure, il lui suffit d'étudier l'un de ces ensembles et de transposer par h les résultats obtenus dans l'autre.

Il s'agit donc d'une notion qui permet de relier des domaines apparemment fort différents.

Ainsi une rotation de $\mathbb{R}^3$ ne paraît pas, à priori, avoir grand chose à voir avec les polynômes Legendre, ni un déplacement de $\mathbb{R}^3$ avec les fonctions de Bessel. Et pourtant, nous verrons dans un de ces cas que, d'une certaine façon, ce sont deux aspects de la même chose.

II - La notion de groupe de transformations.

Remarquons que nous avons introduit successivement deux interprétations de la notion de groupe. 1° Pour définir (en chapitre 1) un groupe de façon générale, nous n'avons parlé que des multiplications entre éléments du groupe. 2° Pour définir le groupe des rotations, nous avons dit "C'est l'ensemble des transformations de $\mathbb{R}^3$ conservant le produit scalaire". Autrement dit, nous avons fait agir les éléments du groupe, les rotations, dans un espace. On dit encore qu'on a donné une réalisation concrète du groupe en termes de transformations géométriques.

Ce point de vue est bien sûr le plus fructueux pour la physique car ces transformations géométriques se prêtent bien mieux à une interprétation physique que les éléments quelque peu abstraits de 1°.

De façon générale:

Def:

Les applications bijectives d'un ensemble $\mathcal{A}$ sur lui-même, forment un groupe S . Et tout sous groupe de S est appelé un groupe de transformations de $\mathcal{A}$.

Exemples.

a) Je prends pour $\mathcal{A}$ l'ensemble des points du plan: S est alors l'ensemble des transformations ponctuelles et bijectives du plan sur lui-même.

Après avoir choisi un repère dans le plan, je considère les transformations de $\mathcal{A}$:

$$\text{par: } \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

D'un point de vue historique, c'est sous cette forme que les groupes sont apparus en physique.

Il est facile de vérifier que ces transformations forment un sous-groupe de S . On dit qu'elles constituent un groupe de transformations du plan. (qui est ici le groupe des rotations planes).

b) Je prends pour E un espace à 3 dimensions. Et j'y considère, après avoir choisi un repère les transformations définies par :

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j \quad i \text{ de } 1 \text{ à } 3.$$

où $[R_{ij}]$ est une matrice orthogonale

Le groupe de transformations ainsi défini est bien sûr celui des rotations de $\mathbb{R}^3$.

c) Je prends pour E un espace à 3^m dimensions.

Une fois un repère choisi, les composantes d'un vecteur d'un tel espace pourront se noter :

$$x_{i_1 i_2 \dots i_m}$$

où les indices $i_1, i_2, \dots, i_m$ peuvent prendre les valeurs 1, 2, 3. (on obtient bien ainsi 3^m composantes)

Je considère les transformations :

$$(1) \quad x'_{i_1 i_2 \dots i_m} = \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^3 R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \dots R_{i_m j_m} x_{j_1 j_2 \dots j_m}$$

$i_1, i_2, \dots, i_m$ de 1 à 3.

où $[R_{ij}]$ désigne encore une matrice orthogonale 3×3 .

(à titre d'illustration, on pourra se reporter à l'exercice A à la fin du chapitre)

Une loi de transformation telle que (1) définit ce que l'on appelle un tenseur. Ouvrons une parenthèse pour indiquer de façon un peu plus précise de quoi il s'agit.

La notion de tenseur.

Posons nous d'abord la question : qu'est ce qu'un vecteur ?

Deux réponses différentes se présentent à l'esprit :

- 1° un élément d'un espace vectoriel
- 2° un ensemble de 3 composantes (dans le cas à 3 dimensions).

Certes, la première réponse est parfaitement correcte.

En est-il de même de la deuxième ? Ainsi que l'indique la première un vecteur est un élément d'un espace, un objet géométrique et en tant que tel il ne dépend en aucune façon du choix de la base. (et d'ailleurs on emploie souvent le qualificatif de "géométrique" pour souligner qu'un objet est indépendant de la base choisie). Or si je change la base, le triplet de nombres qui sont ses composantes va changer selon une loi bien définie (et bien connue) :

$$x'_i = \sum_j R_{ij} x_j.$$

où R désigne la rotation de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice $\vec{e}_i \left| \begin{matrix} \vec{e}_i \end{matrix} \right.$

(celle qui donne le nouveau repère sur l'ancien, mais de toutes façons ces détails techniques ne nous importent guère ici).

Ainsi pour définir un vecteur il ne suffit pas de se donner un triplet de trois nombres, il faut de plus indiquer comment ces trois composantes se transforment dans un changement de base (ou, ce qui revient au même, dans une rotation du vecteur lui-même).

De même pour définir un scalaire, il ne suffit pas de dire que c'est un nombre, il faut encore préciser que ce nombre reste inchangé dans un changement de base.

Il est bien sûr tentant de généraliser en considérant des états généraux

triques ayant des composantes dont la formule de transformation fait intervenir, non plus seulement une matrice R , mais $2, 3 \dots n$. Les composantes de ces objets devront bien sûr dépendre d'autant d'indices qu'il y aura de matrices R dans leur loi de transformation de façon à ce qu'on puisse bien l'écrire sous la forme (1).

Déf: L'être géométrique dont les composantes se transforment selon (1) s'appelle un tenseur de rang n (et de dimension 3, pour rappeler que chaque indice ne prend que 3 valeurs et qu'il y a donc 3^n composantes en tout.)

Ex: A ce titre un vecteur de $\mathbb{R}^3$ sera donc un tenseur de rang 1 (et de dimension 3) et un scalaire (dont la formule de transformation ne fait intervenir aucune matrice R) sera un tenseur de rang 0. Cet de dimension 3; mais dans ce cas qu'elle que soit la dimension il n'y aura toujours qu'une composante: $3^0 = 4^0 = \dots = 1$!)

Nous connaissons aussi des objets dont les composantes ont deux indices: les applications linéaires*.

Nous nous donc mis en évidence une sorte de classification des objets géométriques.

⋮

tenseur d'ordre 3

tenseur d'ordre 2 (application linéaire)

tenseur d'ordre 1 (vecteur)

tenseur d'ordre 0 (scalaire)

* Les lois de transformation de leurs composantes fait bien intervenir deux fois la matrice R ; sous forme matricielle, elle s'écrit:

$$M' = R M R^{-1}$$

Le fait que ce soit ici R^{-1} qui intervienne (et non deux fois R) tient à d'autres qualités d'un tenseur (la covariance et la contravariance) qui pour notre propos ont une importance.

(58)
les composantes de ces objets géométriques ont une loi de transformation de plus en plus compliquée à mesure qu'on s'élève dans cette hiérarchie.

La question se pose de savoir si les tenseurs ainsi définis épuisent tous les objets géométriques envisageables. Nous verrons à la fin de ce chapitre que la réponse est non; il existe dans la hiérarchie ci dessus des échelons intermédiaires; des tenseurs d'ordre demi entier en somme.

Revenons à la notion de groupe de transformations. De façon générale, une fois que nous avons défini un groupe G de transformations sur E à partir d'un certain groupe abstrait G , nous sommes que G garde la marque de son origine en conservant l'essentiel de la structure de G .

Il est donc assez naturel d'imposer que la correspondance entre G et G soit un homomorphisme. Nous arrivons ainsi à la notion fondamentale de représentation d'un groupe.

III - La notion de représentation d'un groupe.

Les préliminaires du début de ce chapitre (intérêt de la notion d'homomorphisme, définition d'un groupe par son action dans un certain ensemble c.-à-d. groupe de transformations) ont tous eu pour rôle d'introduire la définition d'une représentation.

Malgré cela, le lecteur ne verra peut-être pas de suite l'intérêt de la définition qui suit (les mathématiciens ont bien eux-mêmes mis quelques dizaines d'années pour la dégager!). Celui-ci lui apparaîtra, on l'espère, au fur et à mesure du cours.

A. Définition.

1. Déf.:

On dit que l'on a défini une représentation d'un groupe G sur un espace vectoriel E , si l'on a défini un homomorphisme T de G sur un groupe $\mathcal{G}$ d'applications linéaires inversibles de E dans E .

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\text{homomorphisme } T} & T(g) \in \mathcal{G} \\ \in G & & \\ & \searrow \vec{x} & \\ & \in E & \xrightarrow{\quad} \vec{x}' = T(g)\vec{x} \\ & & \in E \end{array}$$

$$T(g_1 \cdot g_2) = T(g_1) \circ T(g_2).$$

Remarquons que le groupe de transformations $\mathcal{G}$ considéré ici est réduit aux seules applications linéaires (inversibles). Le champ mathématique ainsi défini est bien assez vaste, comme la suite le montrera.

Remarquons aussi que lorsque T est un isomorphisme, on dit que la représentation est fidèle.

2 - Remarque.

Nous sommes arrivés à la notion de représentation d'un groupe par les séries de l'algèbre. Un autre point de vue, qui est celui de l'analyse, consiste à dire:

"La notion de représentation d'un groupe ne fait que généraliser celle de fonction exponentielle."

En effet, on peut définir cette fonction comme étant la seule fonction continue pour laquelle on a:

$$\mathcal{E}(x+y) = \mathcal{E}(x) \mathcal{E}(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

La généralisation de cette équation au cas d'un groupe quelconque G nous amène à considérer les fonctions vérifiant:

$$\mathcal{E}(g_1 g_2) = \mathcal{E}(g_1) \mathcal{E}(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

La notion de fonction (c.-à-d. d'application de G dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ne convient cependant pas bien; en effet si G n'est pas commutatif on a:

$$g_1 g_2 \neq g_2 g_1.$$

alors qu'on a 2^{ème} membre on aura: $\mathcal{E}(g_1) \mathcal{E}(g_2) = \mathcal{E}(g_2) \mathcal{E}(g_1)$

Il faut donc mieux remplacer les fonctions par des applications telles que $T(g)$ dont le produit n'est pas non plus commutatif.

Nous avons dit que ce point de vue est celui de l'analyse, nous pouvons donc prévoir que les notions de limite et continuité vont y jouer un rôle. De fait, adoptant ce point de vue, notre définition devient:

Déf.

On dit que l'on a défini une représentation d'un groupe G sur un espace vectoriel E si on a défini un homomorphisme continu T de G sur un groupe d'applications linéaires continues et inversibles de E dans E .

Ne nous étendons pas davantage car nous n'aurons pas besoin de ce point de vue le moment.

B. Exemples.

1. Une représentation à 2 dimensions du groupe des rotations planes.

Considérons le groupe des rotations planes $SO(2)$. A chaque rotation on peut faire correspondre sa matrice ; nous faisons donc ici soigneusement la distinction entre la rotation, transformation géométrique, et sa matrice bien que dans la pratique, par abus de langage on les identifie souvent en disant par exemple : " soit la rotation $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \dots "$

Nous définissons ^{donc} une représentation de ce groupe par :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} g \\ \text{rotation dans} \\ \text{le plan d'angle} \\ \theta \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = D(g) \\
 & \searrow & \\
 & \begin{array}{c} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \mathbb{R}^2 \end{array} & \xrightarrow{\quad} D(g) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta x_1 - \sin \theta x_2 \\ \sin \theta x_1 + \cos \theta x_2 \end{bmatrix} \\
 & & \mathbb{R}^2
 \end{array}$$

la vérification de la relation d'homomorphisme $D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2)$ résulte des formules (1) $\begin{cases} \cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \end{cases}$

Inversément si nous avons défini les fonctions $\cos$ et $\sin$ comme étant celles qui fournissent une représentation (réelle d'ordre 2) du groupe des rotations planes, la relation d'homomorphisme nous aurait fourni les relations fonctionnelles (1). C'est là un point de vue que nous retrouverons au chapitre 3 à propos des polynômes de Legendre.

2. Une représentation à 1 dimension du groupe des rotations planes.

La remarque A2 nous suggère que la fonction exponentielle va jouer un rôle privilégié dans les représentations. Définissons une représentation de $SO(2)$ par :

$$g: \text{rotation d'angle } \theta \xrightarrow{\alpha\theta} e^{\alpha\theta} = D(g)$$

$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{\quad} & z' = z e^{\alpha\theta} \\ \in \mathbb{C} & & \in \mathbb{C} \end{array}$$

α est un nombre, choisi une fois pour toutes, de $\mathbb{C}$.

Il s'agit bien d'une représentation car:

$$\frac{\alpha(\theta+\theta')}{e} = \frac{\alpha\theta}{e} \cdot \frac{\alpha\theta'}{e}$$

3 - Une représentation à 3 dimensions du groupe des rotations planes.

Définir une telle représentation revient à définir l'action de ce groupe dans $\mathbb{R}^3$. Cela n'est pas difficile: il suffit de faire agir chaque rotation plane dans un plan donné (le plan xy par exemple, pour la simplicité) de $\mathbb{R}^3$.

$$g: \text{rotation d'angle } \theta \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D(g)$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{\alpha} & \xrightarrow{\quad} & \vec{\alpha}' = D(g)\vec{\alpha} \\ \in \mathbb{R}^3 & & \in \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Si nous avions choisi un plan de rotation quelconque (moins brice), la forme de $D(g)$ aurait bien sûr été bien plus compliquée.

4 - Tentative infructueuse.

Considérons le groupe des translations du plan et essayons d'en définir une représentation à 2 dimensions. Essayons:

$$g: \text{translation de vecteur } \vec{u} \xrightarrow{\quad} D(g)$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{\alpha} & \xrightarrow{\quad} & \vec{\alpha}' = \vec{\alpha} + \vec{u} \\ \in \mathbb{R}^2 & & \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

S'agit-il d'une représentation ?

D est bien un homomorphisme :

$$D(gg') = \vec{\alpha} + (\vec{\alpha} + \vec{\alpha}')$$

$$D(g) D(g') \vec{x} = D(g) (\vec{x} + \vec{\alpha}') = (\vec{x} + \vec{\alpha}) + \vec{\alpha}'.$$

Cependant il ne s'agit pas d'une représentation car $D(g)$ n'est pas une application linéaire (c'est une application affine).

Si l'on néglige le rapport du temps de vérifier la linéarité c'est que elle le suggère (et ici c'est bien le cas également !) en général par simple inspection de la forme de $D(g)$.

Pour le groupe des rotations planes, qui est abélien, nous avons réussi à définir une représentation de dimension 1 non triviale (parce qu'on peut bien lui toujours faire correspondre à tout élément du groupe le nombre 1 ce qui définit bien une représentation de dimension 1, mais sans grand intérêt); peut-être réussirons nous à faire de même pour le groupe des translations, qui est aussi abélien.

Il s'agit donc de fabriquer à l'aide du vecteur $\vec{x}$ un scalaire qui puisse tenir lieu d'argument pour l'exponentielle. Pour fabriquer un scalaire à l'aide d'un vecteur le plus simple est le produit scalaire. Soit donc $\vec{p}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$; nous écrivons:

$$g: \text{translation de vecteur } \vec{\alpha} \xrightarrow[\vec{g}]{(\vec{\alpha}, \vec{p})} e = D(g) \xrightarrow{\vec{g}} g' = e^{\vec{g}} \vec{g}.$$

Il s'agit bien là d'une représentation, induite par le vecteur (fixe) $\vec{p}$.

5. Une représentation de $SO(3)$.

De même qu'en 1° pour $SO(2)$, essayons de définir une représentation de $SO(3)$ en associant à chaque rotation sa matrice (écrite en fonction des angles d'Euler par exemple) $D(R)$:

$$R : \text{rotation (prope) de } \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\quad} D(R) \xrightarrow{\quad} \vec{x}' = D(R) \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

Nous sommes bien embarrassés pour vérifier qu'il s'agit bien d'un homomorphisme. Quels sont en effet les angles d'Euler d'un produit $R \circ R'$ de deux rotations (dans le cas de $SO(2)$, il n'y avait pas de problème c'était simplement la somme des angles de rotation) ? et nous soupçonnons qu'ils n'auront pas une expression simple ; de même, une telle complexité la perspective de faire le produit de 2 matrices $D(R), D(R')$ n'est guère réjouissante !

Mais nous pouvons faire cette démonstration de façon générale, pour toute représentation où les $D(R)$ sont les matrices des applications linéaires constituant le groupe G .

Nous voulons donc montrer que :

$$D(R) \circ D(R') = D(R \circ R')$$

Par définition de la matrice d'une application linéaire, on aura :

$$R \vec{e}_k = \sum_{i=1}^n D(R)_{ik} \vec{e}_i$$

(dans notre cas, n vaut bien sûr 3).

D'une part :

$$(R \circ R') \vec{e}_k = \sum_{i=1}^n D(R \circ R')_{ik} \vec{e}_i$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_o(\mathcal{R}' \vec{e}_k) &= \mathcal{R} \left[\sum_{j=1}^m D(\mathcal{R}')_{jk} \vec{e}_j \right] = \sum_{j=1}^m D(\mathcal{R}')_{jk} [\mathcal{R} \vec{e}_j] \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m D(\mathcal{R}')_{jk} D(\mathcal{R})_{ij} \vec{e}_i \\
 &= \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^m D(\mathcal{R})_{ij} D(\mathcal{R}')_{jk} \right] \vec{e}_i \\
 &= \sum_{i=1}^m [D(\mathcal{R}) D(\mathcal{R}')]_{ik} \vec{e}_i
 \end{aligned}$$

d'où il résulte bien que : $D(\mathcal{R}) D(\mathcal{R}') = D(\mathcal{R}_o \mathcal{R}')$.

G. Un exemple plus compliqué et plus intéressant.

Reprenons II 2.6) avec, pour la simplicité des notations $n=2$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{R} & \xrightarrow{\quad \circ \quad} & T(\mathcal{R}) \\
 \text{rotation correspondant} & & \\
 \text{à la matrice orthogonale} & & \\
 \mathcal{R} & & \begin{array}{c} \alpha_{i_1 i_2} \\ \mathbb{R}^{3^2} \end{array} \xrightarrow{\quad \circ \quad} \alpha'_{i_1 i_2} = \sum_{j_1 j_2} R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \alpha_{j_1 j_2} \\
 & & \mathbb{R}^{3^2}
 \end{array}$$

S'agit-il d'une représentation du groupe des rotations dans un espace à 9 dimensions.

Il suffit de vérifier la condition d'homomorphisme.

$$[T(\mathcal{R}_o \mathcal{R}') \vec{\alpha}]_{i_1 i_2} = \sum_{j_1 j_2} (\mathcal{R}_o \mathcal{R}')_{i_1 j_1} (\mathcal{R}_o \mathcal{R}')_{i_2 j_2} \alpha_{j_1 j_2}.$$

$$\text{or: } (\mathcal{R}_o \mathcal{R}')_{i_1 j_1} = \sum_{k_1} R_{i_1 k_1} R'_{k_1 j_1}$$

$$\text{d'où: } [T(\mathcal{R}_o \mathcal{R}') \vec{\alpha}]_{i_1 i_2} = \sum_{j_1 j_2} \sum_{k_1 k_2} (R_{i_1 k_1} R'_{k_1 j_1}) (R_{i_2 k_2} R'_{k_2 j_2}) \alpha_{j_1 j_2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k_1 k_2} R_{i_1 k_1} R_{i_2 k_2} \underbrace{\sum_{j_1 j_2} R'_{k_1 j_1} R'_{k_2 j_2} \alpha_{j_1 j_2}}_{[T(R') \vec{\alpha}]_{k_1 k_2} = \vec{\alpha}'_{k_1 k_2}} \\
&= \sum_{k_1 k_2} R_{i_1 k_1} R_{i_2 k_2} \alpha'_{k_1 k_2} \\
&= [T(R) \vec{\alpha}']_{i_1 i_2} \\
&= [T(R) \cdot T(R') \vec{\alpha}]_{i_1 i_2}.
\end{aligned}$$

Il s'agit donc bien d'une représentation, à 3 dimensions de $SO(3)$.

Notons bien qu'ici (contrairement aux précédents) on ne peut plus définir $T(R)$ directement par l'écriture immédiate de sa matrice : on définit $T(R)$ par son action sur chacun des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le calcul de la matrice qui est certes possible bien sûr peut souvent (et c'est le cas ici) demander pas mal d'efforts.

Conclusion. Dans tous les exemples que nous venons de donner, il s'agit de représentations de dimension finie pour lesquelles on pouvait donc écrire $D(g)$ sous forme matricielle ; on parle alors de représentation matricielle par opposition aux représentations de dimension infinie pour lesquelles on ne peut plus écrire de matrices (elles auraient de dimension infinie aussi).

Exemples classiques de représentation d'un groupe

Nous avons déjà donné deux exemples simples à titre d'illustration. Ceux que nous allons donner maintenant ont un intérêt en soi.

1. Représentation régulière.

Considérons un élément g_0 d'un groupe G . Si nous faisons agir g_0 sur tous les éléments de G cela définit une application de G dans G :

$$g \xrightarrow{T_{g_0}} T_{g_0}(g) = g_0 g.$$

Dès lors, une idée malicieuse consiste à définir ainsi une représentation de G :

$$g_0 \xrightarrow{\quad \circ \quad} T(g_0) \xrightarrow[\substack{g \\ \in G}]{\quad \circ \quad} T(g_0)g = g_0 g \in G.$$

Remarque Le lecteur pourra à juste titre objecter que G n'est pas un espace vectoriel comme cela devrait être. Rien de plus facile cependant, que de fabriquer un espace vectoriel à l'aide des éléments d'un groupe.

Il suffit d'introduire l'addition et la multiplication par un scalaire. Ce faisant, nous les définissons de façon toute formelle en décidant dorénavant de prendre en considération des éléments du type: $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n$.

De même façon qu'on construit les polynômes à partir des puissances de x . Dans le cas des polynômes nous obtenons par ce procédé l'algèbre des polynômes; ici de même on appelle algèbre de groupe la structure ainsi obtenue.

Remarquons que les éléments du groupe constituent ainsi par définition une base de l'algèbre de groupe.

En montrant qu'il s'agit bien d'une représentation, il suffit de vérifier que:

$$T(g_0 g'_0) g = T(g_0) \circ T(g'_0) g \quad \forall g \in G \quad \text{ce qui est immédiat.}$$

(24)

Montrons qu'elle est fidèle c.-à-d. que : $T(g_0) = T(g'_0) \Rightarrow g_0 = g'_0$.

$$T(g_0) = T(g'_0) \Leftrightarrow T(g_0)g = T(g'_0)g \quad \forall g \in G$$

soit $g_0g = g'_0g \quad \forall g \in G$: il suffit donc de prendre : $g =$

Preuons pour G le groupe des permutations de 3 éléments S_3 .

Nommerons les éléments de ce groupe

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad g_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Preuons $g_0 = g_4$ $T(g_0)g_1 = g_4$ $T(g_0)g_4 = g_1$ $T(g_0)g_6 = g_2$
 $T(g_0)g_5 = g_3$ $T(g_0)g_2 = g_6$ $T(g_0)g_3 = g_5$.

Autrement dit, l'application $T(g_0)$ a pour matrice :

	$T(g_0)g_1$	$T(g_0)g_2$	$T(g_0)g_3$	$T(g_0)g_4$	$T(g_0)g_5$	$T(g_0)g_6$
g_1	0	0	0	1	0	0
g_2	0	0	0	0	0	1
g_3	0	0	0	0	1	0
g_4	1	0	0	0	0	0
g_5	0	0	1	0	0	0
g_6	0	1	0	0	0	0

Signifions dès maintenant que l'importance des représentations régulières tient au théorème suivant (que nous verrons plus loin).

Toutes les représentations irréductibles d'un groupe fini sont contenues dans sa représentation régulière.

2. Représentations dans un espace fonctionnel

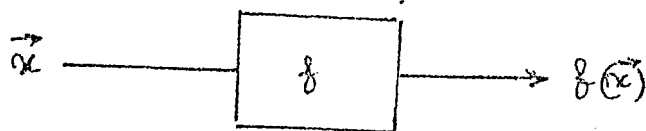
a) Considérons d'une part le groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$ et d'autre part l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}^3$ (à valeur complexe par exemple).

Essayons de définir une représentation par:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\quad T \quad} & T(R) \\ & \downarrow f & \\ & \in \mathcal{L} & \end{array} \quad \xrightarrow{\quad} \quad f' \text{ défini par : } f'(\vec{x}) = f(R^{-1} \vec{x})$$

Cette tentative n'est guère satisfaisante ; en effet comme on ne peut pas faire agir directement R sur f , on définit f' de façon quelque peu indirecte en faisant agir R sur l'argument $\vec{x}$ de f .

Insistons bien sur la différence existant entre une fonction f , considérée en tant qu'application :



et les valeurs $f(\vec{x})$ qui sont les images de $\vec{x}$ par f .

Ainsi une fonction polynôme pourrait par exemple s'écrire :

$$P = \square^3 + 2.\square^2 + 3.\square + 4$$

En la faisant agir sur x , cette variable viendrait se placer aux emplacements qui lui sont réservés :

$$P(x) = [x]^3 + 2.[x]^2 + 3.[x] + 4$$

Et ici, $T(R)$ agit précisément sur les fonctions en tant que telles (et non sur les valeurs) et elle associe à chacune de ces fonctions une autre fonction :

$$f' = T(R)f$$

(1) signifient simplement que pour chaque valeur de $\vec{x}$, cette nouvelle fonction est définie par la valeur : $f(R^{-1} \vec{x})$.

Vérifions qu'il s'agit bien là d'une représentation.

Cette démonstration est à la fois importante par son résultat qui est très général et par sa méthode qui demande de l'attention.

Il faut donc montrer que:

$$[T(R_1) T(R_2) f](\vec{x}) = [T(R_1 \circ R_2) f](\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Dans $[T(R_1) T(R_2) f](\vec{x})$ posons $T(R_2) f = f'$

alors $[T(R_1) f'](\vec{x}) \stackrel{(1)}{=} f'(R_1^{-1} \vec{x})$.

Mais la fonction f' elle-même est définie par l'identité: $f'(\vec{x}) = f(R_2^{-1} \vec{x})$

d'où résulte que: $f'(R_1^{-1} \vec{x}) = f(R_2^{-1} (R_1^{-1} \vec{x}))$

soit: $[T(R_1) T(R_2) f](\vec{x}) = f(R_2^{-1} R_1^{-1} \vec{x}) = f((R_1 R_2)^{-1} \vec{x}) = [T(R_1 \circ R_2) f](\vec{x}).$

Cette démonstration montre en particulier qu'il faut bien prendre $R^{-1} \vec{x}$ dans la définition (1) sans quoi T ne serait pas un homomorphisme. *

b) Plus généralement soit G un groupe de transformations d'un ensemble cb et soit L l'espace vectoriel des fonctions $f(\vec{x})$ où $\vec{x} \in cb$.

On définit la représentation par:

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\quad \circ \quad} & T(g) \\ \downarrow f & & \downarrow \\ L & \xrightarrow{\quad \circ \quad} & [T(g) f](\vec{x}) = f(g^{-1} \vec{x}) \end{array}$$

au lieu de prendre pour f une fonction scalaire, nous prenons une fonction vectorielle: $\vec{f}(\vec{x})$ nous pouvons encore définir une représentation:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\quad \circ \quad} & T(R) \\ \downarrow \vec{f} & & \downarrow \\ L & \xrightarrow{\quad \circ \quad} & [T(R) \vec{f}](\vec{x}) = R \vec{f}(R^{-1} \vec{x}). \end{array}$$

montrons que: $[T(R_1) T(R_2) \vec{f}](\vec{x}) = [T(R_1 \circ R_2) \vec{f}](\vec{x})$

$T(R_2) \vec{f} = \vec{f}' \Rightarrow [T(R_1) \vec{f}'](\vec{x}) = R_1 \vec{f}'(R_1^{-1} \vec{x})$

$\downarrow$
 $\vec{f}'(\vec{x}) = R_2 \vec{f}(R_2^{-1} \vec{x}) \Rightarrow \quad \quad \quad = R_1 R_2 \vec{f}(R_2^{-1} R_1^{-1} \vec{x}) = R_1 R_2 \vec{f}((R_1 R_2)^{-1} \vec{x})$

plus que nous avons rencontré un tel exemple au chapitre 1 III 2.c)

La démonstration de l'isomorphisme est bien sûr exactement la même que précédemment. *

Toutefois ici, nous ne sommes plus sûr à priori que si $f \in \mathcal{L}$, la nouvelle fonction : $T(g)f \in$ aussi $\mathcal{L}$. De façon générale nous ignorerons cependant le genre de difficulté qui, pour les problèmes que nous poserons, ne tirera pas à conséquence.

c) Premier exemple : représentation du groupe des translations dans un espace de fonctions.

Notons par $t_{\vec{x}}$ la translation de vecteur $\vec{x}$ dans $\mathbb{R}^2$ (il y a bien sûr un isomorphisme entre les translations et les vecteurs de $\mathbb{R}^2$) :

$$t_{\vec{x}} \cdot \vec{x} = \vec{x} + \vec{x}$$

Considérons par ailleurs un espace de fonctions $\mathcal{F}(\vec{x})$; nous aurons ici besoin de supposer les fonctions développables en série ; nous noterons $\mathcal{L}$ l'espace de fonctions à 2 variables (et à valeur réelle ou complexe, peu importe) développable en série entière.

Appliquant la définition générale donnée en b, nous écrivons.

Le type de représentation dans un espace de fonction défini en b, bien que très couramment utilisé, n'est de loin pas le seul possible. De façon générale pour la définition de représentations on dispose d'une très grande latitude de choix. La construction que l'on vient de décrire s'applique en particulier à l'espace $\mathcal{L}$ de fonctions définies sur le groupe G (et à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

$$\begin{array}{ccc} g_0 & \xrightarrow{\quad \circ \quad} & T(g_0) \\ \in G & & \mathcal{L} \end{array} \quad \xrightarrow{\quad \circ \quad} \quad [\pi(g_0)f](g) = f(g_0^{-1}g)$$

ce qui fournit donc une généralisation de la notion de représentation régulière.

$$\begin{array}{ccc}
 t_{\vec{a}} & \xrightarrow{\quad} & T(\vec{a}) \\
 & \searrow \scriptstyle f & \searrow \scriptstyle f' \\
 & \in \mathcal{L}' & \in \mathcal{L}' \text{ défini par:} \\
 & & f'(\vec{x}) = f(t_{\vec{a}}^{-1} \vec{x})
 \end{array}$$

La fonction f' est donc définie par :

$$f'(\vec{x}) = f(\vec{x} - \vec{a}). \quad (1)$$

En fait, le groupe des translations est abélien : $t_{\vec{a}} t_{\vec{b}} = t_{\vec{b}} t_{\vec{a}}$ et dans ce cas (s'en assurer en refaisant la démonstration de 2.) on peut indifféremment définir f' par :

$$f'(\vec{x}) = f(t_{\vec{a}}^{-1} \vec{x}) \quad \text{ou bien par} \quad f'(\vec{x}) = f(t_{\vec{a}} \vec{x})$$

Pour de simples questions d'écriture, nous préferons avoir un signe + dans (1) et nous prendrons donc la 2^e possibilité. Ainsi :

$$f'(\vec{x}) = f(\vec{x} + \vec{a}). \quad (1')$$

Insistons une fois de plus sur le fait que l'application linéaire $T(\vec{a})$ est parfaitement définie par (1') (puisque à toute fonction f , je peux ainsi associer une unique image f') même si son écriture explicite se trouve être très difficile.

Ici cependant, nous sommes dans un cas suffisamment simple pour que cette écriture soit assez facile à trouver. Puisque nous avons supposé les f développables en série entière, nous pouvons écrire :

$$f(\vec{x} + \vec{a}) = f(\vec{x}) + [(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) f](\vec{x}) + \frac{1}{2!} [(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^2 f](\vec{x}) + \dots \quad (2)$$

* Rappelons que le développement en série d'une fonction de 2 variables s'écrit :

$$\begin{aligned}
 f(x_1 + a_1, x_2 + a_2) = & f(x_1, x_2) \\
 & + a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \\
 & + \frac{a_1^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{2a_1 a_2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{a_2^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

toutes les dérivées étant prises au point (x_1, x_2) .

(13)

le vecteur $\vec{\nabla}$ ("nabla") et, rappelons-le, par composantes :

$$\vec{\nabla} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{cases}$$

de sorte que : $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^2$ par exemple vaut :

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^2 = \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 = a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 a_1 a_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

(2) s'écrit encore :

$$f(\vec{x} + \vec{a}) = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^n}{n!} \right] f \right\}(\vec{x})$$

ou de façon symbolique :

$$f(\vec{x} + \vec{a}) = \left\{ e^{\vec{a} \cdot \vec{\nabla}} f \right\}(\vec{x})$$

Ainsi l'expression explicite de l'opérateur $T(\vec{a})$ est :

$$T(\vec{a}) = e^{\vec{a} \cdot \vec{\nabla}}$$

d) Deuxième exemple : représentation de $SO(3)$ dans l'espace des fonctions d'onde

Un intérêt essentiel de la théorie de la représentation des groupes est son application à la mécanique quantique. Par exemple, elle permet de calculer les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène, ce que nous ferons (en partie, du moins) à la fin du chapitre 3.

Ici, nous présentons les outils qui nous seront nécessaires à ce moment là et cela nous fournit un exemple supplémentaire de représentation.

2) Présentation.

On sait qu'un système quantique se trouvant dans un potentiel V est décrit par une fonction d'onde Ψ qui 1° satisfait à l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} [\Delta \Psi](\vec{r}) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}).$$

2° est de carré sommable c.-à-d. que :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} \text{ existe.}$$

L'ensemble de ces fonctions d'onde forme un espace vectoriel que nous notons W_E (pour montrer qu'il est relatif à la valeur E de l'énergie considérée)

Nous allons montrer que si le potentiel V présente une symétrie sphérique (c.-à-d. si $V(R\vec{r}) = V(\vec{r}) \quad \forall R \in SO(3)$) W_E constitue l'espace d'une représentation du groupe des rotations définie par :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\quad} & T(R) \\ SO(3) & \xrightarrow[\substack{\Psi \\ W_E}]{} & [T(R)\Psi](\vec{r}) = \Psi(R^{-1}\vec{r}) \\ & & W_E \end{array}$$

Pour cela, il nous suffit de vérifier que si $\Psi \in W_E$, $T(R)\Psi \in W_E$. (la propriété d'homomorphisme sera automatiquement réalisée de par la forme même de la représentation choisie).

③. Commençons par montrer que si Ψ est de carré sommable, $T(R)\Psi$ est aussi de carré sommable.

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |[T(R)\Psi](\vec{r})|^2 d\vec{r} = \iiint_{\mathbb{R}^3} |\Psi(R^{-1}\vec{r})|^2 d\vec{r}.$$

Faisons dans cette intégrale le changement de variable $\vec{r}' = R^{-1}\vec{r}$ (1)

Elle devient :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\vec{r}')|^2 \left| \frac{D(\vec{r})}{D(\vec{r}')} \right| d\vec{r}'$$

où $D(\vec{r})/D(\vec{r}')$ désigne le jacobien de la transformation (1).

le jacobien vaut 1, parce que la transformation (1) est une rotation et conserve donc les volumes. Cela est facile à voir du moins de façon intuitive: (32)

un volume V s'écrit en effet: $V = \iiint_{\Omega} d\vec{x}$. Pour la commodité, nous supposons que la surface fermée Ω est à symétrie sphérique autour de 0. En faisant le changement de variable, cette intégrale devient: $\iiint_{\Omega} \left| \frac{D(\vec{x})}{D(\vec{x}')} \right| d\vec{x}'$, et comme ces deux expressions doivent être égales et qu'il s'agit de fonction positive, on en déduit:

$$\left| \frac{D(\vec{x})}{D(\vec{x}')} \right| = 1$$

g) Montrons maintenant que: $\Psi'(\vec{x}) = [T(R)\Psi](\vec{x})$ est encore une solution de l'équation de Schrödinger. Écrivons-la de façon plus explicite:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x})}{\partial x_i^2} + V(\vec{x}) \Psi(\vec{x}) = E \Psi(\vec{x}). \quad (2)$$

remplaçons dans (2) partout $\vec{x}$ par $\vec{x}' = R^{-1} \vec{x}$ (ce qui revient à un simple changement de notation):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x}')}{\partial x_i'^2} + V(\vec{x}') \Psi(\vec{x}') = E \Psi(\vec{x}')$$

c.-à-d., puisque nous supposons que $V(\vec{x}') = V(R^{-1} \vec{x}) = V(\vec{x})$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \frac{\partial^2 \Psi'(\vec{x})}{\partial x_i'^2} + V(\vec{x}) \Psi'(\vec{x}) = E \Psi'(\vec{x}). \quad (2')$$

il nous suffit donc de montrer que: $\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Désignons par $(R^{-1})_{ij}$ les éléments matriciels de la transformation R^{-1} .

alors: $x_i' = \sum_j (R^{-1})_{ji} x_j$

or: $\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial x_j'}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j'} = \sum_j (R^{-1})_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j'}$

et $\sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_i \left[\sum_j (R^{-1})_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j'} \right] \left[\sum_k (R^{-1})_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k'} \right]$

$$= \sum_{j,k} \left[\sum_i (R^{-1})_{ji} (R^{-1})_{ki} \right] \frac{\partial}{\partial x_j'} \frac{\partial}{\partial x_k'}$$

Le crochet vaut δ_{ij} car la matrice R^{-1} est (de même que la matrice R) orthogonale. Ainsi:
$$\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j'^2}.$$

(2') α réciproque donc:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \frac{\partial^2 \Psi'(\vec{x})}{\partial x_i^2} + V(\vec{x}) \Psi'(\vec{x}) = E \Psi'(\vec{x})$$

ce qui montre que Ψ' est bien solution de l'équation de Schrödinger.

Est ce que ce résultat (à savoir que les solutions de l'équation de Schrödinger forment une représentation du groupe des rotations) présente une utilité pratique?

On imagine sûrement maintenant que lorsque nous aurons une connaissance précise des représentations de $SO(3)$ (ce qui ne tardera pas) cela nous sera d'une grande aide pour la résolution de l'équation de Schrödinger; ainsi que nous l'avions annoncé au chapitre 1 III 1 b).

8) La représentation que nous venons de construire présente encore une autre propriété remarquable. On a:

$$(T(R) \Psi_1, T(R) \Psi_2) = (\Psi_1, \Psi_2)$$

où (Ψ_1, Ψ_2) désigne le produit scalaire habituel de la mécanique quantique

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi_1^*(\vec{x}) \Psi_2(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Autrement dit, les opérateurs $T(R)$ sont unitaires*.

Montrons le:

$$\begin{aligned} (T(R) \Psi_1, T(R) \Psi_2) &= \iiint_{\mathbb{R}^3} [T(R) \Psi_1]^*(\vec{x}) [T(R) \Psi_2](\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \Psi_1^*(R^{-1}\vec{x}) \Psi_2(R^{-1}\vec{x}) d\vec{x}. \end{aligned}$$

et le changement de variable $\vec{x}' = R^{-1}\vec{x}$ effectuée de la même façon opère (conduit au résultat annoncé. Cette notion de représentation unitaire sera fondamentale dans la suite.

IV - L'homomorphisme de $SU(2)$ sur $SO(3)$

A - Mise en évidence de l'homomorphisme.

Nous avons déjà affirmé* qu'il existe un lien très étroit entre $SU(2)$ et $SO(3)$. Le moment est venu maintenant de le voir de près. De façon plus précise nous allons montrer qu'il existe un homomorphisme de $SU(2)$ sur $SO(3)$. Il s'agit là d'un résultat absolument fondamental et que nous utiliserons très souvent dans la suite.

Le problème se présente ainsi: on cherche une application f :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad f \quad} & f(A) = R \\ \in SU(2) & & \in \text{groupe des rotations} \end{array}$$

mais comment définir une rotation de $\mathbb{R}^3$ à l'aide d'une matrice 2×2 ? Plutôt que d'essayer de faire agir les matrices A dans $\mathbb{R}^3$, nous allons rapprocher $\mathbb{R}^3$ des matrices A en établissant un isomorphisme entre $\mathbb{R}^3$ et un certain groupe de matrices 2×2 .

1- L'isomorphisme entre $\mathbb{R}^3$ et un espace vectoriel de matrices.

Définissons l'application:

$$\begin{array}{ccc} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) & \xrightarrow{\quad P \quad} & P(\vec{\alpha}) = \begin{bmatrix} i\alpha_3 & i\alpha_1 - \alpha_2 \\ i\alpha_1 + \alpha_2 & -i\alpha_3 \end{bmatrix} \\ \in \mathbb{R}^3 & & \in E \end{array}$$

Il est facile de vérifier que les matrices de cette forme (nommé de l'axe

* Au chapitre 1 IV B 1

dition et de la multiplication par les nombres réels) constituant un espace vectoriel E . Une base en est fournie par:

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

et le développement de $P(\vec{\alpha})$ sur cette base s'écrit:

$$P(\vec{\alpha}) = \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3.$$

E est donc un espace vectoriel à 3 dimensions.

Montrons que P est un isomorphisme. En vertu de ce que nous avons dit à la fin de I A 2 nous pouvons alors identifier les deux espaces vectoriels $\mathbb{R}^3$ et E .

On a bien : $P(\vec{\alpha}) = P(\vec{\alpha}') \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\alpha}'$

par définition de l'égalité de 2 matrices ; P est donc bien injective.

Elle est aussi surjective par définition de E .

Et, bien sûr, on a :

$$P(\alpha_1 + \alpha'_1, \alpha_2 + \alpha'_2, \alpha_3 + \alpha'_3) = P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + P(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)$$

P est donc bien un isomorphisme et on peut remarquer qu'on a de plus :

$$\det P = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \|\vec{\alpha}\|^2.$$

2- L'homomorphisme fondamental.

Ceci dit, nous pouvons définir l'application f par:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{B}(A) \\ \text{ESU}(2) & \begin{array}{c} P \\ \in E \end{array} & \xrightarrow{\quad} P' = A P A^+ \\ & & E \end{array}$$

Remarque Pour se rendre compte de la façon dont l'application $\mathcal{F}$ est définie on pourra, à titre d'exercice, chercher l'image de :

$$A = \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix}$$

ce qui est fait en B2.2.

Si nous pouvons montrer que $\mathcal{F}$ est bien un homomorphisme, nous aurons déjà établi une représentation à 3 dimensions de $SU(2)$.

Si de plus, nous montrons que $\mathcal{F}(A)$ est bien une rotation de $\mathbb{R}^3$ (ou de E ce qui revient au même en vertu de l'isomorphisme), alors nous aurons complètement réalisé notre objectif initial.

Toutefois, il est prudent de commencer par vérifier que le P' que nous avons défini appartient bien à E . On a :

$$1^\circ \quad P'^+ = (A P A^+)^+ = (A^+)^+ P^+ A^+ = A (-P) A^+ = -P'$$

$$2^\circ \quad \text{Tr } P' = \text{Tr}(A P A^+) = \text{Tr}(A P A^{-1})^* = \text{Tr}(P A^{-1} A) = \text{Tr } P = 0$$

Or toute matrice satisfaisant à ces deux conditions (anti-hermitienne et de trace nulle) se met (on le vérifie de suite) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} i\alpha_3 & i\alpha_1 - \alpha_2 \\ i\alpha_1 + \alpha_2 & -i\alpha_3 \end{bmatrix}$$

donc appartient à E .

Vérifions que $\mathcal{F}$ est bien un homomorphisme ; c.o.d que :

$$[\mathcal{F}(A_1 \cdot A_2)]P = [\mathcal{F}(A_1) \circ \mathcal{F}(A_2)]P \quad \forall P \in E$$

$$[\mathcal{F}(A_1 A_2)]P = A_1 A_2 \cdot P \cdot (A_1 A_2)^+ = A_1 (A_2 P A_2^+) A_1^+ = \mathcal{F}(A_1) P' = \mathcal{F}(A_1) \circ \mathcal{F}(A_2) P$$

$\mathcal{F}(A_2)P = P'$

* C'est là une propriété générale de la trace : $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA) = \text{Tr}(CAB)$

Remarquons maintenant que l'on a :

$$\det P' = \det (A P A^+) = \det (A P A^{-1}) = (\det A) \det P (\det A)^{-1}$$

soit : $\det P' = \det P.$

et d'après la remarque faite à la fin de 1° :

$$\|\vec{x}'\|^2 = \|\vec{x}\|^2$$

La transformation $\mathcal{B}(A)$ conservant la norme nous pouvons dire qu'il s'agit d'une rotation ; il est en effet facile de déduire de la conservation de la norme celle du produit scalaire : considérons pour cela l'expression :

$$(A(\vec{x} + \vec{y}), A(\vec{x} + \vec{y})) = (A\vec{x}, A\vec{x}) + (A\vec{y}, A\vec{y}) + (A\vec{x}, A\vec{y}) + (A\vec{y}, A\vec{x})$$

d'où :

$$\begin{aligned} 2(A\vec{x}, A\vec{y}) &= (A(\vec{x} + \vec{y}), A(\vec{x} + \vec{y})) - (A\vec{x}, A\vec{x}) - (A\vec{y}, A\vec{y}) \\ &= (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) - (\vec{x}, \vec{x}) - (\vec{y}, \vec{y}) \\ &= 2(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

égalité qui a donc lieu : $\forall \vec{x}, \forall \vec{y}.$

Toutefois, pour avoir un homomorphisme de $SU(2)$ sur $\underline{\subseteq} O(3)$ nous devons aussi vérifier que la rotation $\mathcal{B}(A)$ est bien propre, vérification que nous ferons en B1.

3- Interprétation géométrique.

Nous voudrions donner de la correspondance :

$$SO(3) \longrightarrow SU(2)$$

une interprétation représentable géométriquement. Commençons par faire deux remarques préliminaires:

(1°) Si on fait agir toutes les rotations de $SO(3)$ sur un point, ses images constitueront tous les points d'une sphère. Autrement dit à toute rotation correspond une transformation sur la surface d'une sphère.

(2°) Les matrices de $SU(2)$ sont des matrices 2×2 complexes. On va donc à priori les faire agir sur un vecteur colonne à 2 composantes complexes:

$$\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

mais un couple de 2 variables complexes correspond d'un point de vue géométrique à 4 dimensions (réelles) ce qui n'est pas représentable. Pour réduire ce nombre, nous pouvons par exemple considérer les rapports:

$$\frac{z'_1}{z'_2} = \frac{\alpha \frac{z_1}{z_2} + \beta}{\gamma \frac{z_1}{z_2} + \delta}$$

posant: $z = z_1/z_2$, nous associons à toute matrice de $SU(2)$ une transformation du plan complexe. Le fait de ne considérer que des rapports nous fait certes perdre une partie de l'information initiale: deux matrices différant d'une constante multiplicative donneront la même transformation géométrique. Nous pouvons donc dès maintenant convenir de prendre des $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ satisfaisant à la condition:

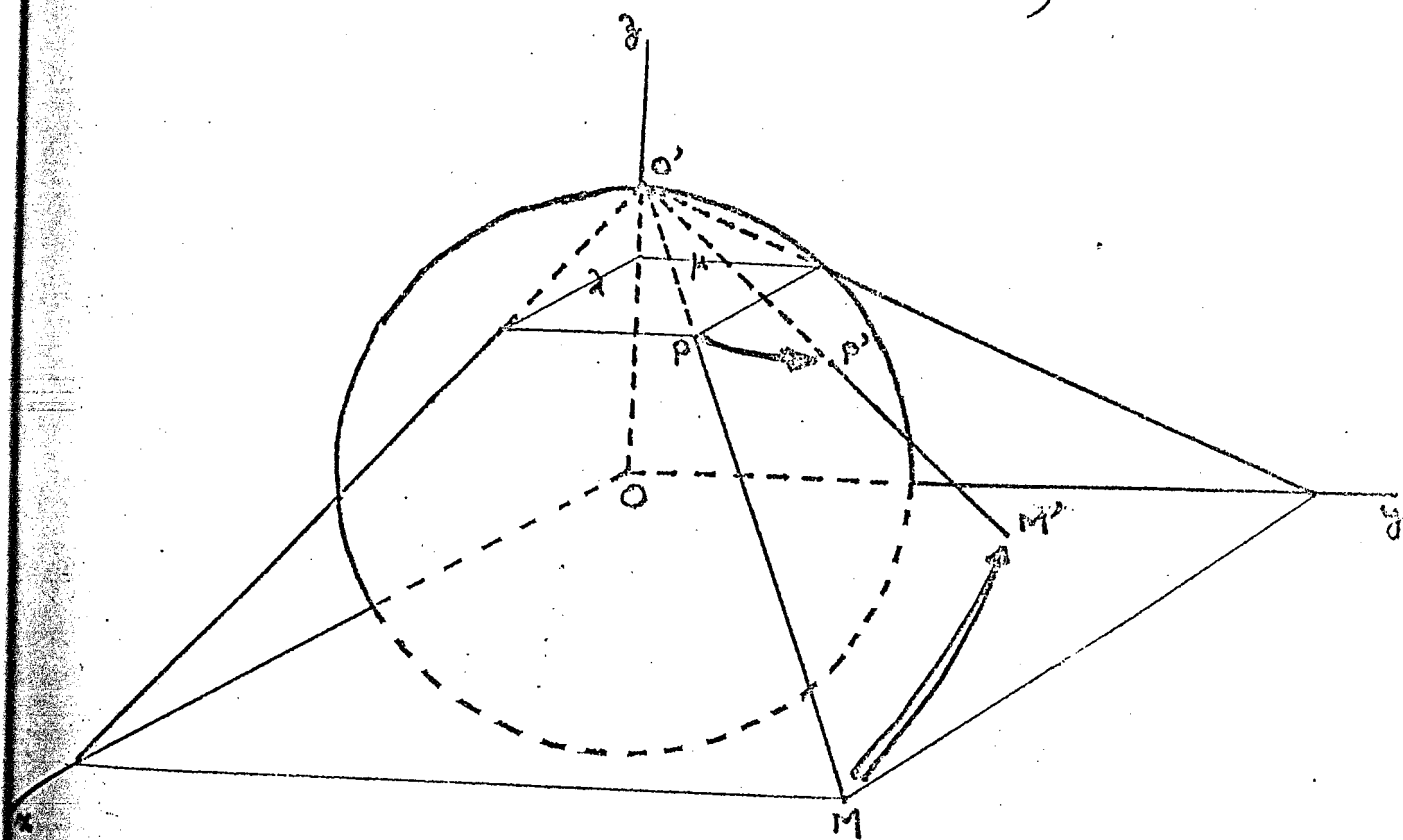
$$\alpha \delta - \beta \gamma = 1.$$

Ces deux remarques nous conduisent donc à chercher une représentation géométrique de l'homomorphisme en construisant une correspondance

géométrique entre les points d'une sphère et ceux d'un plan.

La transformation stéréographique (qui n'est autre qu'une inversion de centre O') associe à tout point P (différent de O') de la sphère un point M du plan.

Est-ce qu'elle associe bien à une rotation, une transformation du plan qui correspond à un élément de $ST(2)$ (comme nous nous sommes mis, à priori, la condition déterminant = 1, il faudra seulement s'assurer qu'on a bien une matrice unitaire) ?



Faisons subir à P , pour commencer, une rotation autour de Oz .
Par suite de la similitude des triangles des plans zOx et zOy on a (on suppose le diamètre de la sphère égal à 1) :

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \nu}$$

$$\frac{y}{\mu} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \nu}$$

λ, μ, ν : coordonnées de P .

x, y : coordonnées de M .

pour : $z = x + iy$ nous aurons :

$$z = \frac{\lambda + i\mu}{\frac{1}{2} - \nu}$$

la rotation autour de Oz se traduit pour le point P par :

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda \cos \varphi - \mu \sin \varphi \\ \mu' = \lambda \sin \varphi + \mu \cos \varphi \\ \nu' = \nu \end{cases}$$

et pour M , il en résulte la transformation :

$$z' = \frac{\lambda' + i\mu'}{\frac{1}{2} - \nu'} = \frac{\lambda \cos \varphi - \mu \sin \varphi + i(\lambda \sin \varphi + \mu \cos \varphi)}{\frac{1}{2} - \nu} = e^{i\varphi} z.$$

ce qui correspond à :

$$\alpha = e^{i\varphi/2}$$

$$\gamma = 0$$

$$\beta = 0$$

$$\delta = e^{-i\varphi/2}$$

ou bien

$$\alpha = -e^{i\varphi/2}$$

$$\gamma = 0$$

$$\beta = 0$$

$$\delta = -e^{-i\varphi/2}$$

chacun de ces choix assure bien la condition :

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

En recommençant un raisonnement analogue pour les rotations autour de Ox , nous trouvons :

$$z' = \frac{z \cos \theta/2 + i \sin \theta/2}{z i \sin \theta/2 + \cos \theta/2}$$

ou bien

$$z' = \frac{z(-\cos \theta/2) - i \sin \theta/2}{z(-i \sin \theta/2) - \cos \theta/2}$$

Dans ces deux cas nous trouvons donc bien des matrices unitaires. Or une rotation quelconque peut être construite, à l'aide de la méthode des angles d'Euler, à partir de rotations autour de Oz et Ox .* Nous pouvons donc affirmer que :

La projection stéréographique associe à toute rotation de $SO(3)$ une transformation du plan complexe correspondant à 2 matrices de $SU(2)$ de signes opposés.

Remarque. Nous avons donné cette image géométrique pour rendre plus " parlante " une correspondance purement algébrique. Cette visualisation n'est pas sans inconvénients : le principal est que la condition déterminant = +1 s'introduit de façon tout à fait arbitraire. Et quant à la condition d'unitarité, elle s'introduit presque par hasard jusqu'à ce qu'on se contente de vérifier a posteriori qu'elle a bien lieu.

Elle montre cependant qu'à une rotation correspondent deux matrices de $SU(2)$, résultat sur lequel nous revenons en B 2 b.

B. Propriétés complémentaires.

Toute cette partie pourra être lue en dernière lecture.

* Il serait préférable de dire : à partir de rotations autour du 3^e axe et du 1^{er} axe, étant donné qu'en passant d'un repère intermédiaire à un autre le nom de ces axes change.

1- $f(A)$ est une rotation propre.

Pour cette démonstration qui est un peu plus difficile que le reste (et souvent omise dans les livres, d'ailleurs) on pourra éventuellement se contenter d'un survol rapide.

Dire que $f(A)$ est une rotation propre revient à dire qu'elle ne comporte pas de retournements et conserve donc le produit mixte de 3 vecteurs quelconques $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$. Nous voulons donc montrer que: $(R\vec{U}, R\vec{V}, R\vec{W}) = (\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$. (1).

Pour exprimer ce produit mixte nous voudrions disposer pour $P(\vec{x})$ d'une forme plus compacte que l'expression explicite fournie par la matrice 2×2 . Nous choisissons pour cela une base dans l'espace vectoriel E telle que l'on ait:

$$P(\vec{x}) = \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3. \quad (2)$$

on voit de suite qu'il faut prendre: $I_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ $I_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

Ceci dit, et profitant de l'identification entre $\mathbb{R}^3$ et E nous pouvons écrire:

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \left(\sum_i u_i I_i, \sum_j v_j I_j, \sum_k w_k I_k \right)$$

soit en vertu de la linéarité du produit mixte:

$$= \sum_{i,j,k} u_i v_j w_k (I_i, I_j, I_k).$$

Mais, pour que cette expression soit correcte nous devons donner un sens à (I_i, I_j, I_k) . Comment former un scalaire avec ces 3 matrices; nous pouvons par exemple essayer:

$$(I_i, I_j, I_k) = \text{Tr}(I_i \cdot I_j \cdot I_k).$$

est ce que cela nous donne bien la bonne expression pour le produit mixte?

Oui, à un coefficient près; on a en effet: $\text{Tr}(I_i I_j I_k) = -2 \epsilon_{ijk}$. *

ϵ_{ijk} est un symbole qui vaut $\begin{cases} 0 & \text{si 2 des indices } i, j, k \text{ sont égaux} \\ 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est déduit de } (1, 2, 3) \text{ par un nombre pair de transpositions.} \\ -1 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$

on trouve donc: $(I_i, I_j, I_k) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(I_i I_j I_k)$ et donc les relations: $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j,k} u_i v_j w_k \text{Tr}(I_i I_j I_k)$ (43)

en vertu de la linéarité de la trace $= -\frac{1}{2} \text{Tr}(P(\vec{U}) \cdot P(\vec{V}) \cdot P(\vec{W}))$.

Une expression du produit mixte une fois établie, il est facile de vérifier qu'on a la relation (1). *

2. Encore un peu mieux!

Maintenant que nous avons montré qu'il y a un homomorphisme entre $SU(2)$ et $SO(3)$, nous nous demandons bien sûr si cet homomorphisme ne serait pas, par hasard, isomorphe. Nous allons voir que f est en effet bien surjectif, mais pas injectif.

a) f surjectif

Il va nous suffire de montrer (à cause de la décomposition de $\mathbb{R}^3$) qu'on peut obtenir à partir d'éléments de $SU(2)$ toute rotation autour de Oz et autour de Ox .

Montrons que si l'on prend: $A = \begin{bmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix}$ $f(A)$ est une rotation autour de Oz .

Pour cela nous mettons A sous la même forme que les P : $A = I \cos \phi + \sin \phi I_3$ (I est la matrice unité).

Nous devons donc calculer:

$$P' = (I \cos \phi + I_3 \sin \phi)(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3)(I \cos \phi - I_3 \sin \phi).$$

Le calcul se fait aisément en remarquant que l'on a: $I_1 I_2 = I_3$ et les 2 autres relations qui s'en déduisent par permutation circulaire.

On trouve: $P' = (\alpha_1 \cos 2\phi - \alpha_2 \sin 2\phi) I_1 + (\alpha_1 \sin 2\phi + \alpha_2 \cos 2\phi) I_2 + \alpha_3 I_3$.

Ainsi, si on veut obtenir la rotation d'axe Oz et d'angle α , il suffit de choisir: $\phi = \alpha/2$.

On montrerait de même (le faire!) que la matrice $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ a pour

démonstration pourra paraître un peu artificielle. Il serait beaucoup plus naturel vérifier directement que $\det f = +1$. Le calcul est assez long (cf exercices).

une rotation autour de Ox .

La rotation la plus générale, correspondant aux angles d'Euler α, β, γ s'obtient donc à partir de l'élément suivant de $SU(2)$:

$$\begin{bmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta/2 & i \sin \beta/2 \\ i \sin \beta/2 & \cos \beta/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos \beta/2 & i e^{i(\alpha-\gamma)/2} \sin \beta/2 \\ i e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin \beta/2 & e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos \beta/2 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{F}$ non injectif.

La relation $P' = A P A^\dagger$ montre bien que les matrices A et $-A$ donne lieu à la même transformation $\mathcal{F}(A)$, ce qui montre bien que $\mathcal{F}$ n'est pas injective.

Montrons que ce sont bien les seules. Pour cela, il suffit de chercher toutes les matrices A donnant la rotation identité (ce qu'on appelle le noyau de l'application) c.-à-d. : $A P A^{-1} = P \quad \forall P \in E$

Autrement dit, nous devons trouver toutes les matrices de $SU(2)$ telles que :

$$A P - P A = 0 \quad \forall P \in E$$

Pour commencer essayons d'exprimer A sous une forme compacte à l'aide des I_k ; pour la simplicité des notations, posons : $\theta = \beta/2 \quad \phi = \frac{\alpha+\gamma}{2} \quad \psi = \frac{\alpha-\gamma}{2}$.
On vérifie alors que A s'écrit :

$$A = \cos \theta \cos \phi I + \sin \theta \cos \phi I_1 + \sin \theta \sin \phi I_2 + \cos \theta \sin \phi I_3.$$

Pour exprimer que A commute avec P , il nous suffit d'écrire successivement que A commute avec I_1, I_2 et I_3 . Comme on a des relations du type :

$$[I_1, I_2] = I_3 \quad \text{etc} \quad \text{on obtient de suite :}$$

$$[A, I_3] = \sin \theta \sin \phi I_1 - \sin \theta \cos \phi I_2 = 0 \quad \text{ce qui impose } \theta = 0$$

ce réduit donc à : $\cos \phi + \sin \phi I_2$ et :

$$[A, I_1] = \sin \phi I_2 = 0 \Rightarrow \phi = k\pi.$$

A se réduit donc finalement à $\pm I$.

Le noyau de notre homomorphisme se réduit bien à $\pm I$ et par suite de :

$$\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(A) \cdot I = \mathcal{F}(A) \cdot \mathcal{F}(\pm I) = \mathcal{F}(\pm A)$$

soit que seules les matrices A et $-A$ peuvent donner la rotation $\mathcal{F}(A)$.

3. Remarque

A titre indicatif, citons les isomorphismes (notés $\sim$) suivants existant entre différents groupes qui sont tous importants en physique.

$$SO(4, \mathbb{R}) \sim SU(2) \times SU(2)$$

matrices orthogonales
réelles à déterminant
+1 et d'ordre 4

$$\text{Groupe de Lorentz} \sim SL(2, \mathbb{C})$$

matrices 2×2 complexes
et de déterminant égal à 1.

$$SO(3, \mathbb{C}) \sim SL(2, \mathbb{C})$$

matrices orthogonales
complexes de déterminant
+1 et d'ordre 3.

V Une conséquence de l'homomorphisme de $SU(2)$ sur $SO(3)$: la notion de spineur.

Dans les livres de mécanique quantique on trouve souvent la phrase:

"Les états d'une particule de spin $1/2$ sont représentés par une fonction d'onde à deux composantes: $\begin{bmatrix} \psi_1(\vec{r}) \\ \psi_2(\vec{r}) \end{bmatrix}$ qu'on appelle un spineur".

A défaut d'explication complémentaire, on est en droit de se demander pourquoi un tel objet à deux composantes s'appelle un spineur et non pas un vecteur à 2 composantes.

C'est à cette question que nous voudrions répondre: nous définirons un spineur (en indiquant quel lien existe entre spineur et vecteur de $\mathbb{R}^3$); mais nous ne dirons pas pourquoi une particule de spin $1/2$ doit être représentée par un spineur.

A - La notion de produit tensoriel de deux espaces vectoriels.

1 - Définition.

Nous n'aurons besoin ici que d'une définition essentiellement opératoire (suffisante pour faire des calculs) du produit tensoriel.*

Déf Soient E, F deux espaces vectoriels.

E dimension n base $\{\vec{e}_i\}$

F dimension m base $\{\vec{f}_i\}$

Le produit tensoriel $E \otimes F$ sera un espace vectoriel à $n \times m$

* On pourra trouver une définition complète (quoique très succincte) dans Vilenkin (page 53)

dimensions dont les éléments auront donc $n \times m$ composantes.

Une base est constituée par les vecteurs :

$$\vec{e}_i \otimes \vec{f}_j \quad i \text{ de } 1 \text{ à } n, \quad j \text{ de } 1 \text{ à } m$$

La définition est bien sûr incomplète puisque nous n'avons pas défini le produit tensoriel $\vec{e}_i \otimes \vec{f}_j$. Mais cette lacune ne nous gênera pas.

2. Exemples.

a) Exemple 1 Prenons $n=2$, $m=3$ et supposons que E et F soient des espaces vectoriels formés de matrices colonne. Les bases de E et F s'écrivent alors :

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nous savons que la base de $E \otimes F$ sera formée de vecteurs ayant chacun 6 composantes ; on peut les fabriquer en faisant les produits de la façon suivante :

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_1 \otimes \vec{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_1 \otimes \vec{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\vdots$

L'espace produit tensoriel sera alors l'espace vectoriel des matrices 2×3 .

Question : Tout vecteur de $E \otimes F$ peut-il s'écrire sous la forme :

$$\vec{A} \otimes \vec{B} \quad \text{ou} \quad \vec{A} \in E, \quad \vec{B} \in F.$$

La forme générale d'un tel produit tensoriel est :

$$\begin{aligned}\vec{A} \otimes \vec{B} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) \otimes (b_1 \vec{f}_1 + b_2 \vec{f}_2 + b_3 \vec{f}_3) \\ &= a_1 b_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{f}_1 + a_1 b_2 \vec{e}_1 \otimes \vec{f}_2 + \dots\end{aligned}$$

on voit que le produit tensoriel $\vec{A} \otimes \vec{B}$ va dépendre de $2+3=5$ paramètres arbitraires alors qu'il y aura $3 \times 2 = 6$ relations à satisfaire, on s'attend donc à tomber sur une impossibilité et c'est effectivement ce qui se produit quand on fait le calcul.

Quelle sera la loi de transformation du produit tensoriel $\vec{A} \otimes \vec{B}$ dans un changement de base simultané dans E et F (c.-à-d. dans une rotation à 2 dimensions dans E et à 3 dimensions dans F) ?

pour $\vec{A}$:
$$a'_{i_1} = \sum_{j_1=1}^2 R^1_{i_1 j_1} a_{j_1}$$

pour $\vec{B}$:
$$b'_{i_2} = \sum_{j_2=1}^3 R^2_{i_2 j_2} b_{j_2}$$

pour $\vec{A} \otimes \vec{B}$:
$$a'_{i_1} b'_{i_2} = \sum_{j_1, j_2} R^1_{i_1 j_1} R^2_{i_2 j_2} a_{j_1} b_{j_2}$$

(puisque les composantes de $\vec{A} \otimes \vec{B}$ sont bien les produits 2 à 2 des composantes de $\vec{A}$ et de $\vec{B}$).

Autrement dit :

Règle :

Le produit tensoriel de 2 vecteurs est un tenseur d'ordre 2*. Mais il n'est pas possible de fabriquer tous les tenseurs d'ordre 2 uniquement par produit tensoriel de vecteurs (il faut en plus faire des combinaisons linéaires).

b) Exemple 2. Nous prenons $m=2$, $n=3$ et nous supposons que E et F sont des espaces de polynômes. Leurs bases s'écrivent alors :

* De façon générale, le produit tensoriel permet de passer d'un niveau de la classification tensorielle des $\vec{A}$ et $\vec{B}$ à un niveau supérieur.

$$\vec{e}_1 = x \quad \vec{e}_2 = x^0$$

$$\vec{f}_1 = y^2 \quad \vec{f}_2 = y \quad \vec{f}_3 = y^0.$$

Une base de $E \otimes F$ sera dans ce cas :

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_1 \otimes \vec{f}_1 = x y^2$$

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_1 \otimes \vec{f}_2 = x y$$

$\vdots$

L'espace produit tensoriel sera ici l'espace des polynômes à 2 variables de degré inférieur ou égal à 3.

B. Le spineur.

1- Qu'est ce qu'un spineur ?

Considérons un objet à deux composantes $\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$ (nous avons déjà souligné que l'existence de deux composantes ne suffit pas pour affirmer qu'il s'agit d'un vecteur à 2 dimensions : encore faut-il savoir comment ces deux composantes se transforment dans une rotation), se transformant dans une rotation R de $\underline{\mathbb{R}^3}$ selon la loi :

$$\psi'_i = \sum_{j=1}^2 A_{ij} \psi_j$$

où A_{ij} est l'une des deux matrices (ces deux matrices ne diffèrent, rappelons-le, que par le signe) de $SU(2)$ correspondant par l'homomorphisme à la rotation R .

Un tel objet s'appelle un spineur.

2. Comment se place un spineur dans la classification tensorielle?

Nous allons montrer qu'un spineur se place dans la classification de II c entre le scalaire et le vecteur en ce sens que par produit tensoriel de 2 spineurs on obtient un vecteur.

Le produit tensoriel de deux spineurs se transforme selon:

$$\varphi_{i_1 i_2} = \sum_{j_1, j_2=1}^2 A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \varphi_{j_1 j_2}$$

Nous voulons montrer qu'on peut construire un vecteur à l'aide des $\varphi_{i_1 i_2}$. Mais $\varphi_{i_1 i_2}$ représente en tout 4 composantes. Une de trop!
Or $\varphi_{i_1 i_2}$ peut être écrit sous la forme:

$$\varphi_{i_1 i_2} = \underbrace{\frac{\varphi_{i_1 i_2} + \varphi_{i_2 i_1}}{2}}_{S_{i_1 i_2}} + \frac{\varphi_{i_1 i_2} - \varphi_{i_2 i_1}}{2}$$

d'une somme d'une partie symétrique et d'une partie anti-symétrique. La partie anti-symétrique étant inchangée dans une rotation, nous ne nous intéressons qu'à la partie symétrique: cette démarche qui peut ne paraître ici qu'un artifice est justifiée par le chapitre 3, cf en particulier exercices. Nous définissons:

$$F_1 = \frac{S_{11} + S_{22}}{\sqrt{2}} \quad F_2 = i \frac{S_{22} - S_{11}}{\sqrt{2}} \quad F_3 = S_{12}$$

Faisons une rotation (d'axe Oz et d'angle φ par exemple) et voyons comment les F_i se transforment. L'élément correspondant de $SU(2)$ s'écrit:

$$A = \begin{bmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\varphi'_{11} = A_{11} A_{11} \varphi_{11} = e^{i\varphi} \varphi_{11}$$

$$\varphi'_{12} = \varphi_{12}$$

$$\varphi'_{21} = \varphi_{21}$$

$$\varphi'_{22} = A_{22} A_{22} \varphi_{22} = e^{-i\varphi} \varphi_{22}.$$

soit :

$$F'_1 = \frac{S'_{11} + S'_{22}}{\sqrt{2}} = \frac{e^{i\varphi} S_{11} + e^{-i\varphi} S_{22}}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$F'_2 = (-i) \frac{S'_{11} - S'_{22}}{\sqrt{2}} = (-i) \frac{e^{i\varphi} S_{11} - e^{-i\varphi} S_{22}}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$F'_3 = S'_{12} = \frac{\varphi'_{12} + \varphi'_{21}}{2} = \frac{\varphi_{12} + \varphi_{21}}{2} = S_{12} = F_3.$$

Dans (1) et (2) remplaçons dans les deuxièmes membres les S_{ii} par F_i :

$$S_{11} = \frac{F_1 + i F_2}{\sqrt{2}} \quad S_{22} = \frac{F_1 - i F_2}{\sqrt{2}}$$

soit :

$$F'_1 = \frac{e^{i\varphi}}{2} (F_1 + i F_2) + \frac{e^{-i\varphi}}{2} (F_1 - i F_2)$$

$$= F_1 \cos \varphi - F_2 \sin \varphi.$$

et de même :

$$F'_2 = F_1 \sin \varphi + F_2 \cos \varphi$$

Ainsi l'objet de composantes F_i définies à partir du produit tensoriel de 2 spineurs se transforme bien comme un vecteur. On peut encore exprimer cela en disant :

Proposition :

Le spineur est, dans la hiérarchie tensorielle, l'objet le plus élémentaire (le scalaire mis à part).

Exercice.

Retrouver par un calcul direct le résultat de IV B 1 ; à savoir que $\mathcal{G}(A)$ est une rotation propre :

$$\det[\mathcal{G}(A)] = +1.$$

Solution.

Nous allons calculer la matrice de l'application linéaire $\mathcal{G}(A)$.
On sait que dans E une base est constituée par les 3 matrices :

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Nous cherchons donc :

$$\begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(A)I_1 & \mathcal{G}(A)I_2 & \mathcal{G}(A)I_3 \\ & M & \end{array} \right]$$

Afin de simplifier ce calcul, nous allons nous servir des résultats obtenus en IV B 2 2. A savoir :

- 1° Qu'une matrice A quelconque peut s'écrire sous la forme :
- $$SU(2)$$

$$A = A_1 A_2 A_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & -e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix}}_{\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} I_3} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \beta/2 & i \sin \beta/2 \\ i \sin \beta/2 & \cos \beta/2 \end{bmatrix}}_{\cos \frac{\beta}{2} + i \sin \frac{\beta}{2} I_1} \begin{bmatrix} e^{i\gamma/2} & 0 \\ 0 & -e^{i\gamma/2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

2° Que :

$$\begin{aligned} & (\cos \phi + i \sin \phi I_3)(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3)(\cos \phi - i \sin \phi I_3) \\ &= (\cos 2\phi \alpha_1 - \sin 2\phi \alpha_2) I_1 + (\sin 2\phi \alpha_1 + \cos 2\phi \alpha_2) I_2 + \alpha_3 I_3. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & (\cos \phi + i \sin \phi I_1)(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3)(\cos \phi - i \sin \phi I_1) \\ &= \alpha_1 I_1 + (\alpha_2 \cos 2\phi - \alpha_3 \sin 2\phi) I_2 + (\sin 2\phi \alpha_2 + \cos 2\phi \alpha_3) I_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Muni de ces outils il ne va pas être difficile de calculer :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(A) I_1 &= A_1 A_2 A_3 I_1 (A_1 A_2 A_3)^{\dagger} \\ &= A_1 (A_2 (A_3 I_1 A_3^{\dagger}) A_2^{\dagger}) A_1^{\dagger} \end{aligned}$$

Nous faisons le calcul en trois étapes en utilisant à chaque fois les formules (1) et (2). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(A) I_1 &= (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma) I_1 \\ &+ (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) I_2 \\ &+ \sin \beta \sin \gamma I_3. \end{aligned}$$

La première colonne de la matrice M coïncide donc avec la première colonne de la matrice de rotation écrite en fonction de ses angles d'Euler, résultat dont nous sommes bien sûr que nous doutons si peu puisqu'il n'est au même de faire les rotations dans E ou dans $\mathbb{R}^3$.

(97)

Ainsi le problème du déterminant de M se trouve ramené au problème du déterminant de la matrice :

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui vaut bien sûr 1 (puisque celui de chacune des matrices produit vaut 1).