TD 9: Renormalisation

Dans ce TD on étudie la renormalisation à une boucle du modèle supersymétrique de Wess Zumino, et l'évolution des perturbations sous le groupe de renormalisation. On commence par une mise en jambes avec un modèle purement scalaire. *Ce TD est basé sur l'article d'Iliopoulos Nanopoulos Tomaras Phys. Lett.* **94B** *(1980) 141, ainsi que sur l'appendice E de Haber et Kane, Phys. Rept.* **117** *(1985) 75 pour les conventions sur les spineurs de Majorana.*

1 Champs scalaires couplés

On considère deux champs scalaires réels A et B à 4 dimensions interagissant par le lagrangien

$$\mathcal{L}_{nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_0)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu B_0)^2 - \frac{1}{2}m_0^2(A_0^2 + B_0^2) - \frac{\lambda_0}{2}(A_0^4 + B_0^4) - g_0 A_0^2 B_0^2 \tag{1}$$

En physique statistique, ce modèle décrit l'interaction de deux modèles d'Ising couplés par un couplage énergie-énergie. On se propose de déterminer la renormalisation à une boucle de cette théorie, et d'étudier le flot de renormalisation dans le plan des couplages (λ, g).

• Quelles sont les symétries (discrètes ou continues) de ce Lagrangien ? En déduire qu'il est consistent de se limiter à des contre-termes du même type que les termes apparaissant dans le lagrangien nu (1).

• On considère donc le Lagrangien renormalisé

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ren} &= \frac{1}{2}(1+\delta_Z)\left((\partial_\mu A)^2 + (\partial_\mu B)^2\right) - \frac{1}{2}(m^2+\delta_{m^2})(A^2+B^2) \\ &\quad -\frac{1}{2}(\lambda+\delta_\lambda)(A^4+B^4) - (g+\delta_g)A^2B^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Déterminer la relation entre les quantitées nues $(A_0, B_0, m_0, \lambda_0, g_0)$ et les quantités renormalisées $(A, B, m, g, \lambda; \delta_Z, \delta_{m^2}, \delta_\lambda, \delta_g)$ pour que le Lagrangien renormalisé (2) soit équivalent au Lagrangien nu. Déterminer les règles de Feynman décrivant le calcul perturbatif autour du Lagrangien libre

$$\mathcal{L}_{libre} = \frac{1}{2}\left((\partial_\mu A)^2 + (\partial_\mu B)^2\right) - \frac{1}{2}m^2(A^2+B^2) \tag{3}$$

• Pour simplifier les calculs, on se place dans le cas non massif. Renormaliser la théorie à une boucle en choisissant les conditions de renormalisation de sorte que la théorie décrive deux champs A, B de couplages quartiques λ et g au point de renormalisation euclidien

$s = t = u = -M^2$. On imposera la condition de renormalisation $\Sigma(p^2) = \mathcal{O}((p^2 + M^2)^2)$ au voisinage de $p^2 = -M^2$, et on utilisera la régularisation dimensionnelle.

• La physique est indépendente du choix de l'échelle de renormalisation M (bien que la convergence de la série perturbative soit optimale lorsque M est de l'ordre des moments des particules externes). Exprimer les paramètres nus en fonction des paramètres renormalisés et de l'échelle M. Calculer la variation des couplages renormalisés (λ, g) en fonction de M à paramètres nus invariants. *La réponse:*

$$\beta_\lambda := M\frac{\partial\lambda}{\partial M}|_{\lambda_0,g_0} = \frac{1}{4\pi^2}(9\lambda^2 + g^2) \tag{4}$$
$$\beta_g := M\frac{\partial g}{\partial M}|_{\lambda_0,g_0} = \frac{1}{4\pi^2}(6\lambda g + 4g^2) \tag{5}$$

• On s'intéresse à l'évolution du rapport $\eta = g/\lambda$ sous le flot de renormalisation. Montrer qu'il existe 3 points fixes, $\eta = 0, 1, 3$. Ces valeurs sont-elles attractives ou répulsives dans l'infrarouge ? Interpréter les valeurs obtenues.

2 Renormalisation du modèle de Wess-Zumino

On revient au modèle de Wess Zumino considéré dans le TD 5, correspondant à un multiplet chiral de supersymétrie avec superpotentiel cubique $W = m\Phi^2/2 + g\Phi^3/3$.

• On considère tout d'abord le lagrangien libre

$$\mathcal{L}_{cin} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu B\right)^2 + \frac{1}{2}\overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{2}m^2(A^2 + B^2) \tag{6}$$

La quantification canonique du fermion de Majorana ψ s' effectue en développant

$$\psi(x) = \sum_{s=1,2}\int\frac{d^3p}{2E_p}\left(b_s(p)u(p,s)e^{-ipx} + b_s^\dagger(p)v(p,s)e^{ipx}\right) \tag{7}$$

òu $\{b_r(p), b_s^\dagger(q)\} = (2\pi)^2 2E_p\delta_{rs}\delta^{(3)}(p-q)$ est un oscillateur fermionique canonique. Les polarisations u et v peuvent être choisies de manière à ce que

$$u(p,s) = C\overline{v}^t(p,s)\ , \qquad v(p,s) = C\overline{u}^t(p,s)\ , \tag{8}$$

où C est la matrice de conjugaison de charge, vérifiant $C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^t$, $C^t = C^{-1} = C^\dagger = -C$. Vérifier que l'expansion (7) est compatible avec la condition de Majorana $\psi = C\overline{\psi}^t$ et en déduire le propagateur de Feynman $\langle 0|T\psi^\alpha(x)\psi^\beta(y)|0\rangle$ pour le fermion de Majorana.

• On introduit maintenant les termes d'interaction de dimension 4

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{2}g^2\left(A^2 + B^2\right)^2 - gmA(A^2 + B^2) - g\overline{\psi}(A - i\gamma_5 B)\psi \tag{9}$$

Déterminer les règles de Feynman correspondant à ces interactions.

• On considère le propagateur du champ scalaire A. Montrer que les divergences quadratiques disparaissent grâce à l'interférence des diagrammes de boucle fermionique et bosonique. Montrer qu'il suffit d'introduire une renormalisation de fonction d'onde $A_0 = Z_A^{1/2} A$ pour rendre la self-énergie du champ A finie (Cette conclusion reste valable pour tous les autres diagrammes, en fait à ordre arbitraire en perturbation.)

L'annulation des divergences quadratiques dans la masse des particules scalaires est la motivation principale pour introduire la supersymétrie dans les interactions fondamentales, de manière à garantir une masse de l'ordre de l'échelle electro-faible de 100 *GeV pour le boson de Higgs tout en conservant l'unification à l'énergie* 10^{16} *GeV.*

3 Modèle de Wess-Zumino perturbé et groupe de renormalisation

On revient maintenant au cas non massif, et on renonce aux relations speciales entre les couplages du lagrangien de Wess Zumino. On introduit donc les interactions

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{2}\lambda\left(A^4 + B^4\right) - gA^2B^2 - f\overline{\psi}(A + i\gamma_5 B)\psi \tag{10}$$

où λ, g, f sont maintenant des constantes de couplages arbitraires. Pour $\lambda = g = f^2$, on retrouve le cas supersymétrique (9) avec $g \to g^2$.

• Calculer les parties divergentes de tous les contre-termes nécessaires à la renormalisation de ce modèle à l'ordre d'une boucle. En déduire les fonctions β à une boucle,

$$\pi^2\beta_{f^2} = \frac{3}{2}f^4 \tag{11}$$

$$\pi^2\beta_\lambda = f^2\lambda + \frac{9}{4}\lambda^2 + \frac{1}{4}g^2 - 2f^4 \tag{12}$$

$$\pi^2\beta_g = f^2 g + \frac{3}{2}\lambda g + g^2 - 2f^4 \tag{13}$$

• Montrer que le sous-espace $\lambda = g = f^2$ correspondant au cas supersymétrique est fixe sous le groupe de renormalisation. Est-il stable dans l'infrarouge ? (on pourra introduire les variables $\eta_1 = \lambda/f^2 - 1$ et $\eta_2 = g/f^2 - 1$)

En pratique, la renormalisation des théories supersymétriques s'étudie plus facilement en utilisant des techniques de superespace, qui permettent de traiter toutes les composantes du multiplet supersymétrique en une seule fois.