TD 8: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ et processus associés

Ce TD est basé sur les chapitres 5.1-3 de Peskin Schroeder et 6-1-3 de Itzykson Zuber.

1 Diffusion $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

On considère l'annihilation d'une paire électron-positron en une paire muon-antimuon à l'ordre des arbres en électrodynamique quantique. On note p et p' les moments incidents de l'électron et du positron respectivement, k et k' les moments émergents du muon μ^- et de l'anti-muon μ^+, et $u(p), v(p'), u(k), v(k')$ les vecteurs de polarisations respectifs.

• En utilisant les règles de Feynman, montrer que l'amplitude du processus $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ est donnée par

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} \left(\overline{v}(p')\gamma^\mu u(p)\right) \left(\overline{u}(k)\gamma_\mu v(k')\right) \tag{1}$$

où $q = p + p'$ est l'impulsion du photon virtuel intermédiaire.

• En général, on ne mesure pas le spin des particules incidentes ou émergentes. On rappelle que les polarisations de spin satisfont les relations de complétude (dans la normalisation adoptée par Peskin Schroeder, $\overline{u}^r(p)\overline{u}^s(p) = -\overline{v}^r(p)\overline{v}^s(p) = 2m\delta^{rs}$)

$$\sum_s u^s(p)\overline{u}^s(p) = \not{p} + m \ , \qquad \sum_s v^s(p)\overline{v}^s(p) = \not{p} - m \ . \tag{2}$$

Montrer que la probabilité de produire une paire $\mu^\pm$ de polarisation arbitraire à partir d'une paire $e^\pm$ de polarisation arbitraire est donnée par

$$P = \frac{1}{4}\sum_{spins} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \mathrm{Tr}\left[(\not{p}' - m_e)\gamma^\mu(\not{p} + m_e)\gamma^\nu\right] \cdot \mathrm{Tr}\left[(\not{k} + m_\mu)\gamma_\mu(\not{k}' - m_\mu)\gamma_\nu\right] \tag{3}$$

• On définit les invariants cinématiques de Mandelstam,

$$\begin{aligned} s &= (p+p')^2 = (k+k')^2 \\ t &= (k-p)^2 = (k'-p')^2 \\ u &= (k'-p)^2 = (k-p')^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Montrer qu'ils satisfont à la relation $s + t + u = 2m_e^2 + 2m_\mu^2$. Exprimer s, t, u en fonction de l'énergie E d'*une* particule dans le centre de masse et de l'angle de diffusion θ dans ce même référentiel.

• Calculer la probabilité P en fonction de s, t, u. En raison du pôle à $s = 0$, on parle de *diffusion dans le canal s. Rappel:*

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4\left(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}\right) \tag{5}$$

• On rappelle que la section efficace de diffusion pour un processus à deux particules dans l'état final est donnée par

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}|}{|\vec{p}|} \, P \tag{6}$$

Remarque: ceci est un cas particulier de la formule générale pour la section efficace du processus $A + B \to f$, (IZ 5.13)

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_A p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}} \prod_f \frac{d^3 p_f}{2(2\pi)^3 p_{0f}} |M|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum p_f) \tag{7}$$

où M est l'amplitude de transition amputée des pattes extérieures et privée de la fonction delta de conservation d'énergie $(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum p_f)$.
Calculer la section efficace de diffusion en fonction de l'angle et de l'énergie, ainsi que la section totale intégrée sur θ. Discuter les limites ultrarelativistes et non-relativistes.

2 Symétrie de croisement et processus associés

• On considère maintenant la diffusion electron-muon $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$. Montrer que la probabilité de diffusion non polarisée P s'obtient à partir de (3) par simple échange de s et t. On parle de diffusion dans le canal t. Obtenir la section efficace de diffusion dans la limite ultrarelativiste. Quelle est l'origine de la divergence à $\theta \to 0$?

• On considère cette fois la diffusion electron-positron $e^+e^- \to e^+e^-$, dite diffusion de Bhabha (1936). Montrer qu'il existe cette fois deux diagrammes de Feynman contribuant à ce processus, correspondant à l'échange d'un photon dans les canaux s et t. Calculer la section efficace de diffusion dans la limite ultrarelativiste.

• Discuter rapidement la diffusion electron-electron $e^-e^- \to e^-e^-$, dite diffusion de Moeller (1932).

• Quels sont les diagrammes de Feynman correspondant aux corrections à une boucle à ces interactions ?