TD 7: Réduction LSZ

Dans ce TD, on établit la relation entre éléments de matrice S et fonctions de Green T-ordonnées. C'est la base du calcul des amplitudes de diffusion dont on traitera des exemples au TD 8.
(*Ce TD est basé sur les paragraphes 5-1-3 et 5-1-6 de Itzykson Zuber*)

1 Etats asymptotiques du champ scalaire

On considère les amplitudes de diffusion pour un champ scalaire complexe interagissant $\phi(x)$. A $t \to -\infty$ $(+\infty)$ les particules entrantes (sortantes) sont suffisamment éloignées pour que l'on puisse représenter le champ comme un champ scalaire libre ϕ_{in} (ϕ_{out}),

$$\phi(x) \overset{x_0\to-\infty}{\rightarrow} Z_{in}^{1/2}\phi_{in}(x) \tag{1}$$

$$\phi(x) \overset{x_0\to+\infty}{\rightarrow} Z_{out}^{1/2}\phi_{out}(x) \tag{2}$$

La matrice S est une transformation unitaire reliant les espaces de Fock du champ *in* au champ *out* après l'interaction. On suppose que le vide est stable, $|0\ in\rangle = |0\ out\rangle$, et qu'il en est de même pour les états à une particule $|k\ in\rangle = |k\ out\rangle$.

- En considérant l'élément de matrice $\langle k|\phi(x)|0\rangle$ où $|k\rangle$ est un état à une particule d'impulsion k et en utilisant l'invariance du vide sous les translations, montrer que les constantes Z_{in} et Z_{out} sont identiques. Justifier que pour un champ interagissant, $|Z| \leq 1$.
- Le champ libre ϕ_{in} peut être développé en oscillateurs,

$$\phi_{in}(x) = \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3\omega_k}\left(a_{in}(k)e^{-ikx} + b_{in}^\dagger(k)e^{ikx}\right) \tag{3}$$

Montrer que le produit scalaire (non défini positif) $(\phi_1, \phi_2) = i\int_t d^3x[\phi_1\partial_t\phi_2^\star - \partial_t(\phi_1)\phi_2^\star] := i\int_t d^3x\ (\phi_1 \overleftrightarrow{\partial_0}\ \phi_2^\star)$ entre deux solutions de l'équation de Klein-Gordon est indépendant du temps t choisi pour l'évaluer (Remarque: la norme (ϕ, ϕ) vous rappelle-t-elle quelque chose ?) Exprimer les oscillateurs $a_{in}(k)$ en termes de ϕ_{in} au temps t.

2 Réduction LSZ du champ scalaire

On considère un élément de matrice S généralisé, $M = \langle p_1 \ldots out|\mathcal{O}|k, q_1 \ldots, in\rangle$ où $\mathcal{O}$ est un opérateur construit comme produit de ϕ à des instants fixés. On va établir une formule de récurrence reliant M à un élément de matrice M' d'un opérateur $\mathcal{O}'$ entre les états avec une particule de moins dans l'état initial (un raisonnement identique permettrait d'éliminer les particules dans l'état final).

• L'état $|k, q_1 \ldots, in\rangle$ s'obtient par action sur $|q_1 \ldots, in\rangle$ de l'opérateur de création $a^\dagger_{in}(k)$. En déduire que $M = M(-\infty)$, où $M(t)$ est dfini pour tout temps par

$$M(t) = Z^{-1/2} \int d^3x \ \langle p_1 \ldots out| \left[e^{-ikx} \frac{1}{i} T[\mathcal{O} \overleftrightarrow{\partial_0} \ \phi(x)] \right] |q_1 \ldots, in\rangle \tag{4}$$

et T est le produit ordonné par rapport au temps.

• Montrer que $M(+\infty)$ peut se réécrire comme un élément de matrice disconnecté, où la particule k n'a pas interagi.

• On considère donc $M_{conn} = M(-\infty) - M(\infty) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_0 M(t)$. En utilisant le fait que e^{ikx} est une solution de l'équation libre, montrer que M_{conn} se réécrit

$$M_{conn} = Z^{-1/2} \int d^4x \ e^{-ikx} \ (\Box_x + m^2) \ \langle p_1 \ldots out|T[\mathcal{O}\phi(x)]|q_1 \ldots, in\rangle \tag{5}$$

• On s'est donc ramené à l'élément de matrice S avec un état final de moins, pour l'opérateur $\mathcal{O}'$ qui est le *résidu* du produit T-ordonné $T[\mathcal{O}\phi(x)]$ sur la couche de masse. En itérant ce processus, exprimer l'élément de matrice S pour des états à N_i (N_f) particules dans l'état initial.

3 Réduction LSZ pour le champ de Dirac

On considère un champ de Dirac général interagissant. Comme précedemment, il peut être décrit par deux champs libres *in* et *out*,

$$\psi(x) \overset{x_0 \to -\infty}{\to} Z_f^{1/2} \psi_{in}(x) \tag{6}$$
$$\psi(x) \overset{x_0 \to +\infty}{\to} Z_f^{1/2} \psi_{out}(x) \tag{7}$$

On développe le champ ψ_{in} en oscillateurs,

$$\psi_{in}(x) = \int \sum_{\epsilon=1,2} \frac{d^3k}{2(2\pi)^3 \omega_k} \left(b_{in}(k,\epsilon) u(k,\epsilon) e^{-ikx} + d^\dagger_{in}(k,\epsilon) v(k,\epsilon) e^{ikx} \right) \tag{8}$$

où les spineurs u et v satisfont $(\not{k} - m)u = (\not{k} + m)v = 0$. Montrer que le produit scalaire $(\psi_1, \psi_2) = i \int_t d^3x \ \bar{\psi}_1 \gamma^0 \psi_2$ entre deux solutions de l'équation de Dirac est indépendant du temps t choisi pour l'évaluer. Exprimer les oscillateurs $b(k), d(k)$ et leurs hermitiens conjugués en termes de ψ_{in} au temps t. On pourra utiliser l'identité de Gordon,

$$\bar{u}(p,\epsilon)\gamma^\mu u(q,\epsilon') = \frac{1}{2m} \bar{u}(p,\epsilon) \left[(p+q)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p-q)_\nu \right] u(p',\epsilon') \ , \quad \bar{u}(p,\epsilon)\gamma^\mu v(p',\epsilon') = 0 \tag{9}$$

• En procédant comme pour le cas scalaire, relier l'élément de matrice $\langle p_1 \ldots out|\mathcal{O}\, b^\dagger_{in}(k,\epsilon)| q_1 \ldots in\rangle$ à la différence entre $t = \pm\infty$ de

$$M(t) = Z^{-1/2} \int_t d^3x\ e^{-ikx}\ \langle p_1 \ldots out|T[\mathcal{O}\bar{\psi}(x)]\gamma^0 u(k,\epsilon)|q_1 \ldots, in\rangle \tag{10}$$

où T est le produit T-ordonné incluant le signe pour les fermions.

• En déduire les formules de réduction LSZ pour les fermions (on se restreint implicitement à la partie connectée)

$$\begin{aligned}
\langle out|\mathcal{O}\ b^\dagger_{in}(k,\epsilon)|in\rangle &= -iZ_f^{-1/2} \int d^4x\ \langle out|T[\mathcal{O}\bar{\psi}(x)]|in\rangle\ (-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_x - m)u(k,\epsilon)e^{-ikx} \\
\langle out|\mathcal{O}\ d^\dagger_{in}(k,\epsilon)|in\rangle &= iZ_f^{-1/2} \int d^4x\ e^{-ikx}\bar{v}(k,\epsilon)\ (i\gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_x - m)\ \langle out|T[\mathcal{O}\psi(x)]|in\rangle \\
\langle out|b_{out}(k,\epsilon)\ \mathcal{O}|in\rangle &= -iZ_f^{-1/2} \int d^4x\ e^{ikx}\bar{u}(k,\epsilon)\ (i\gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_x - m)\ \langle out|T[\mathcal{O}\psi(x)]|in\rangle \\
\langle out|d_{out}(k,\epsilon)\mathcal{O}|in\rangle &= iZ_f^{-1/2} \int d^4x\ \langle out|T[\mathcal{O}\bar{\psi}](x)|in\rangle\ (-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_x - m)v(k,\epsilon)e^{ikx}
\end{aligned}$$

4 Diagrammes de Feynman

On considère le Lagrangien pour un champ de Dirac couplé à un champ scalaire par un couplage de Yukawa,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)\psi + g\ \phi\ \bar{\psi}\psi \tag{11}$$

• Exprimer l'élément de matrice S correspondant à la diffusion $e^-e^- \to e^-e^-$ en termes de la fonction de Green à 4 fermions.

• En utilisant le théorème de Wick, évaluer cette fonction de corrélation au second ordre en g.

• ♠ (à faire après le TD8:) calculer la section efficace de diffusion $e^-e^- \to e^-e^-$ non polarisée, toujours à l'ordre g^2.