TD 6: Champ de Dirac couplé à une source externe

On considère le champ de Dirac quantique de l'électron ψ couplé minimalement à un champ électromagnétique *classique* $A_\mu(x)$:

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\,[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\,\psi \tag{1}$$

(*Ce TD est basé sur le paragraphe 4-3 de Itzykson Zuber*)

1 Matrice S et représentation de Schwinger

• Montrer que dans la représentation d'interaction, la matrice de diffusion S est donnée par

$$S = T\ \exp\left(-ie\int d^4x\ \overline{\psi}_{in}\gamma^\mu\psi_{in}(x)A_\mu(x)\right) \tag{2}$$

• En utilisant le théorème de Wick pour les fermions, montrer que l'amplitude de transition vide – vide est donnée par le déterminant

$$\langle 0_{in} \mid S \mid 0_{in}\rangle = \det(1-\Gamma) \tag{3}$$

où Γ est l'opérateur dans l'espace de Hilbert à une particule de spin 1/2, $V = L_2(R^4)\otimes\mathbb{C}^4$, et d'éléments de matrice

$$\langle x,\alpha \mid \Gamma \mid y,\beta\rangle = -ieA_\mu(x)\gamma^\mu_{\alpha\delta}\ \langle 0|T\psi_\delta(x)\overline{\psi}_\beta(y)|0\rangle \tag{4}$$

On pourra utiliser la formule d'expansion pour les déterminants infinis,

$$\det(1-\Gamma) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{P\in S_n}\frac{(-1)^n}{n!}\sigma(P)\sum_{i_1,\dots,i_n}\Gamma_{i_1 i_{P_1}}\dots\Gamma_{i_n i_{P_n}} \tag{5}$$

où $\sigma(P)$ est la signature de la permutation P de n éléments (En dimension finie, la somme se termine à $n \le \dim V$).

• En déduire que l'amplitude de transition vide – vide en présence d'un champ électromagnétique classique $A_\mu(x)$ est donnée par le rapport de déterminants

$$\langle 0_{in} \mid S \mid 0_{in}\rangle = \frac{\det\left(\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu(x)) - m + i\epsilon\right)}{\det\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m + i\epsilon\right)} \tag{6}$$

• En utilisant l'invariance du déterminant sous la transposition, montrer que *le carré* de l'amplitude de transition vide – vide peut s'écrire

$$\langle 0_{in} \mid S \mid 0_{in}\rangle^2 = \frac{\det H}{\det H_0} \tag{7}$$

où H et H_0 sont les opérateurs agissant dans l'espace de Hilbert "de première quantification" V

$$H = [i\partial_\mu - eA_\mu(x)]^2 - \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x) - m^2 + i\epsilon \ , \quad H_0 = [i\partial_\mu]^2 - m^2 + i\epsilon \tag{8}$$

(On rappelle les formules $C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^t$ et $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.)

- En utilisant la representation intégrale dite de Schwinger

$$\ln\frac{a}{b} = \int_0^\infty \frac{ds}{s}\ \left(e^{isb} - e^{isa}\right) \ , \qquad \Im(a), \Im(b) > 0 \tag{9}$$

obtenir la représentation de Schwinger pour l'amplitude de transition vide-vide:

$$\exp\left(-\mathrm{tr}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\int d^4x\ \langle x|\left(e^{isH} - e^{isH_0}\right)|x\rangle\right) \tag{10}$$

- ♠ Etablir une représentation analogue pour le champ scalaire complexe chargé.

2 Problèmes de Landau magnétique et électrique

Par une transformation de Lorentz, on peut toujours[1] choisir les seules composantes non-nulles du champ électromagnétique comme $F_{01} = -F_{10} = E, F_{23} = -F_{32} = B$. De plus, on choisit la jauge de Landau $A_0 = -Ex^1, A_1 = 0, A_2 = -Bx^2, A_3 = 0$. Le calcul de $\langle x|e^{isH}|x\rangle$ se ramène donc au calcul de l'élément de matrice de $H_E = (i\partial_0 + eEx^1)^2 - (i\partial_1)^2$, $H_B = -(i\partial_2 + eBx^3)^2 - (i\partial_3)^2$, $H_S = e(E\sigma^{01} + B\sigma^{23})$.

- Montrer que l'équation de Schrödinger $H_B = \mathcal{E}$ se ramène à l'équation de l'oscillateur harmonique, avec une dégénérescence supplémentaire correspondant au nombre quantique $k_2 = i\partial_2$. En déduire que l'intégrale

$$\int dx^2 dx^3 \langle x^2, x^3|e^{isH_B}|x^2, x^3\rangle \propto \frac{i}{2\sin(eBs)} \tag{11}$$

à un facteur infini près.

- Pour fixer cette divergence, calculer l'élement de matrice non-intégré $\langle x^2, x^3|e^{isH_B}|x^2, x^3\rangle$, en utilisant la représentation impulsion pour chacune des directions 2 et 3.
- En déduire la dégénérescence associée à k_2 en volume fini. Retrouver ce résultat en réfléchissant au comportement semi-classique d'une particule chargée dans un grand champ magnétique $B \to \infty$.
- ♠ Retrouver ces résultats dans la jauge dite symétrique, $A_2 = -\frac{1}{2}Bx^3, A_3 = \frac{1}{2}Bx^2$.

[1] A l'exception du cas où $|\vec{E}| = |\vec{B}|, \vec{E} \perp \vec{B}$, de type onde plane, qui n'est pas réductible à cette forme.

• Montrer que l'équation $H_E = \mathcal{E}$ est équivalente cette fois à un oscillateur harmonique *inversé*. Quel en est le spectre ? A quel effet correspond l'effet tunnel à travers la barrière de potentiel ? Calculer semi-classiquement l'amplitude de pénétration de la barrière.

• On définit l'opérateur H_E par continuation analytique de l'opérateur H_B sous $B \to iB$. En déduire l'élément de matrice non intégré $\langle x^0, x^1 | e^{isH_E} | x^0, x^1 \rangle$. *On obtiendrait le même résultat en considérant le spectre continu de l'oscillateur harmonique inversé, mais avec plus de calculs...*

• Finalement, calculer la contribution du spin 1/2,

$$\mathrm{tr}[e^{ies\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}/2}] = 4\cosh(eEs)\cos(eBs) \tag{12}$$

♠ Quel serait le résultat pour un spin j arbitraire ? (*on supposera que le facteur gyromagnétique est égal à $g = 2$ indépendamment de j; noter que cette valeur est différente de la valeur prédite naivement par le couplage minimal $g = 1/j$, cf Ferrara Porrati Telegdi Phys. Rev. D46 (1992) 3529.*)

• En déduire finalement que l'amplitude de transition vide-vide dans un volume V et pendant une durée T peut s'écrire

$$\langle 0_{in} \mid S \mid 0_{in} \rangle = \exp\left(\frac{VT}{8\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s} \left[e^2 EB \frac{\cosh(eEs)\cos(eBs)}{\sinh(eEs)\sin(eBs)} - \frac{1}{s^2} \right] ie^{-is(m^2 - i\epsilon)} \right) \tag{13}$$

• ♠♠ Par une transformation de Lorentz, le cas non générique $|\vec{E}| = |\vec{B}|, \vec{E} \perp \vec{B}$ peut se réduire à la forme $F_{02} = F_{12} = f$. En utilisant les coordonnées du cône de lumière $x^{\pm} = (x^0 \pm x^1)/\sqrt{2}$, étudier le spectre de l'équation de Schrödinger associée. En déduire qu'une telle combinaison de champ électrique et magnétique d'induit pas de polarisation du vide.

3 Création non-perturbative de paires

On considère maintenant un champ purement électrique.

• Montrer que la probabilité de production de paires électron-positron par unité de volume et de temps est donnée par

$$w = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2} \left[eE\coth(eEs) - \frac{1}{s} \right] \mathrm{Re}(ie^{-s(m^2 - i\epsilon)}) \tag{14}$$

Vérifier que l'intégrale est bien définie aux deux bornes.

• Montrer que ce résultat est nul perturbativement à tous les ordres en le paramètre $|eE|/m^2$. On pourra utiliser la formule (valable pour $n > -1$)

$$\int_0^{\infty} s^n e^{-s(\epsilon + im^2)} = \frac{n!}{(\epsilon + im^2)^{n+1}} \tag{15}$$

• Evaluer l'intégrale en utilisant la méthode des résidus et montrer que l'amplitude de création de paires resomme une infinité de contributions non perturbatives,

$$w = \frac{e^2 E^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-n \frac{\pi m^2}{|eE|}\right) \tag{16}$$

Comparer ce résultat à l'analyse semi-classique de l'effet tunnel de la section 2.

• ♠♠ Comment le résultat (16) est-il affecté dans le cas d'un champ scalaire bosonique ? Dans le cas d'un champ fermionique ou bosonique de spin arbitraire ?

(*On a pu mesurer directement cette production de paires d' électron-positron dans des lasers terawatt, cf D. L. Burke et al, Phys. Rev. Lett. 79 (1997) 1626*)

4 ♠ Lagrangien de Euler-Heisenberg

On considère maintenant la partie dispersive de la matrice S, c'est-à-dire sa phase. On allume à la fois les composantes électriques et magnétiques du champ.

• Montrer que l'intégrale reçoit maintenant des contributions perturbativement à tous les ordres en les petits paramètres eE/m^2 et eB/m^2.

• On donne les premiers termes du développement

$$EB \times \frac{\cosh(E)\cos(B)}{\sinh(E)\sin(B)} = 1 + \frac{1}{3}(E^2 - B^2) - \frac{1}{45}[(E^2 - B^2)^2 + 7(EB)^2] + \dots \tag{17}$$

Montrer que l'amplitude à une boucle de fermions induit les corrections à dérivées supérieures au Lagrangien de Maxwell,

$$\delta L = \frac{e^2}{90(4\pi)^2 m^4} \left[(F_{\mu\nu}^2)^2 + 7(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma})^2\right] + \dots \tag{18}$$

ainsi qu'une renormalisation infinie du Lagrangien de Maxwell.

Ce Lagrangien reçoit des corrections supplémentaires lorsque le champ électromagnétique lui même est quantifié: on a alors des diagrammes à deux boucles dont un propagateur photonique.

• ♠♠ Montrer que la correction au Lagrangien de Maxwell (18) implique que la vitesse de la lumière en présence d'un champ magnétique est différente de la vitesse dans le vide $c = 1$, et dépend de la polarisation:

$$v/c = 1 - a\frac{e^2 B^2}{45 m^4} \sin^2\theta \tag{19}$$

où θ est l'angle entre le champ B et la direction de l'onde et $a = 8$ ou $a = 14$ selon que la polarisation est paralllè ou orthogonale à B (*S. L. Adler, Ann. Phys. 67 (1971) 599; contrairement à la production de paire, cet effet de biréfringence n'a pas encore été observé).*