TD 5: Supersymétrie

1 Fermions de Majorana

• On rappelle que la matrice de conjugaison de charge C est l'opérateur unitaire qui relie les matrices de Dirac à leur transposées, $C\gamma_\mu^t C^{-1} = -\gamma_\mu$. On choisit la phase de C de sorte que $C^2 = CC^* = -1$. L'action de la conjugaison de charge sur un spineur de Dirac est donnée par $\psi_c = \eta C(\bar{\psi})^t$, où η est une phase que l'on déterminera plus tard. Vérifier que $(\psi_c)_c = \psi$.

• Montrer que si ψ satisfait à l'équation de Dirac pour un fermion de charge $+e$ (en présence d'un champ électrique), alors ψ_c satisfait la même équation pour la charge opposée $-e$. Un fermion de charge nulle satisfaisant à la condition de réalité $\psi = \psi_c$ est appelé *fermion de Majorana*. C'est l'équivalent d'un champ scalaire réel dans le cas fermionique.

• Pour décrire un fermion de Majorana, il est commode de choisir une représentation des matrices de Dirac telle que $(\gamma_\mu)^* = -\gamma_\mu$. Déterminer C, et montrer que l'on peut choisir la phase η de sorte que la condition de Majorana $\psi = \psi_c$ soit équivalente à la réalité de chacune des composantes de ψ.

• Soient ψ_1 et ψ_2 deux spineurs de Majorana *anticommutants*. Montrer que les contractions $(\overline{\psi}_1\psi_2,\ \overline{\psi}_1\gamma_5\psi_2,\ \overline{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2,\ \overline{\psi}_1\gamma_5\gamma_\mu\psi_2,\ \overline{\psi}_1\gamma_{\mu\nu}\psi_2)$, se transforment avec un signe $(-,+,+,-,+)$ sous la conjugaison complexe, et avec un signe $(+,+,-,+,-)$ sous l'échange de ψ_1 et ψ_2. (NB: $\gamma_{\mu\nu} := \frac{1}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu] = -i\sigma_{\mu\nu}$)

2 Supersymétrie "on-shell"

On considère le lagrangien pour un boson complexe libre $\Phi(x) = \phi_1 + i\phi_2$ et un fermion de Majorana ψ (anticommutant, comme tout fermion)

$$\mathcal{L}_{cin} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_2\right)^2 + \frac{i}{2}\overline{\psi}\ \partial\!\!\!/\psi\ . \tag{1}$$

Remarquer le facteur 1/2 dans le terme cinétique du fermion de Majorana (et son caractère antihermitien, comme approprié pour le Lagrangien de variables anticommutantes).

• Montrez que l'action $S = \int \mathcal{L}_{cin}\ d^4x$ est invariante sous les transformations:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon\phi_1 &= i\bar{\epsilon}\psi \\ \delta_\epsilon\phi_2 &= \bar{\epsilon}\gamma_5\psi \\ \delta_\epsilon\psi &= \gamma_\mu(\partial_\mu\phi_1 - i\gamma_5\partial_\mu\phi_2)\epsilon \end{aligned} \tag{2}$$

où ϵ est un spineur de Majorana anticommutant, et indépendant de la position x.

• ♠ Calculer le courant de Noether $S_\mu = \bar{\epsilon}_\alpha s^\alpha_\mu$ associé à cette symétrie, et la charge conservée S^α. S_μ et S sont appelés "supercourant" et "supercharge".

• Montrer que le commutateur de deux transformations $\delta_{\epsilon_1}\delta_{\epsilon_2} - \delta_{\epsilon_2}\delta_{\epsilon_1}$ agissant sur les champs ϕ_1, ϕ_2, ψ satisfait

$$\delta_{\epsilon_1}\delta_{\epsilon_2} - \delta_{\epsilon_2}\delta_{\epsilon_1} = -2i(\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2)\partial_\mu \tag{3}$$

lorsqu'on impose les équations du mouvement. On utilisera (après l'avoir démontrée) l'identité de Fierz

$$(\bar{\epsilon}_1\psi)\epsilon_2 = -\frac{1}{4}\sum_A(\bar{\epsilon}_1\gamma_A\epsilon_2)\gamma_A\psi \tag{4}$$

où γ_A désigne la base orthonormée de l'algèbre de Clifford, $\gamma_A \in (1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu, \gamma_{\mu\nu})$, telle que $\mathrm{Tr}(\gamma^A\gamma^B) = 4\delta^{AB}$.

• En déduire que la charge de supersymétrie satisfait

$$\{S_\alpha, S_\beta\} = 2i(C\gamma)^\mu_{\alpha\beta}P_\mu\ , \quad [S_\alpha, P_\mu] = 0 \tag{5}$$

où P_μ sont les générateurs des translations. Les commutateurs de S_α avec les générateurs du groupe de Lorentz sont fixés simplement par le caractère spinoriel de l'indice α. L'algèbre (5) est donc une extension de l'algèbre de Poincaré, on parle de superalgèbre en raison du caractère fermionique des générateurs S_α.

• ♠ Montrer que dans un système satisfaisant (5), le Hamiltonien est à valeurs propres positives, et qu'un état est d'énergie nulle ssi il est invariant sous la supersymétrie, c'est-à-dire $S^\alpha|0\rangle = 0$ (on pourra se placer dans le référentiel au repos, tel que $P_i = 0$)

3 Supersymétrie "off-shell" et interactions

• Pour montrer la fermeture de l'algèbre de transformation (2), on a dû utiliser les équations du mouvement. Pour relaxer cette contrainte, on introduit un champ auxiliaire bosonique complexe $F = F_1 + iF_2$, et on considère les transformations

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon\phi_1 &= i\bar{\epsilon}\psi \\
\delta_\epsilon\phi_2 &= \bar{\epsilon}\gamma_5\psi \\
\delta_\epsilon\psi &= \gamma_\mu(\partial_\mu\phi_1 - i\gamma_5\partial_\mu\phi_2)\epsilon + i(F_1 + i\gamma_5F_2)\epsilon \\
\delta_\epsilon F_1 &= \bar{\epsilon}\gamma_\mu\partial_\mu\psi \\
\delta_\epsilon F_2 &= i\bar{\epsilon}\gamma_5\gamma_\mu\partial_\mu\psi
\end{aligned} \tag{6}$$

Montrer qu'elles vérifient bien l'algèbre de supersymétrie (5), mais cette fois indépendamment des équations du mouvement (on parle de représentation de supersymétrie *off-shell*, et les champs (Φ, ψ, F) forment ce qu'on appelle un *multiplet chiral* de supersymétrie).

- Vérifier que le Lagrangien

$$\mathcal{L}_{cin} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_2\right)^2 + \frac{i}{2}\overline{\psi}\ \partial\!\!\!/ \psi + \frac{1}{2}(F_1^2 + F_2^2)\ . \tag{7}$$

est invariant sous les transformations (6) (à une dérivée totale près). Observer que les champs F_1 et F_2 n'ont pas de terme cinétique à proprement parler, mais qu'ils peuvent être éliminés en termes des autres champs en utilisant leurs équations du mouvement.

- On veut maintenant introduire un terme de masse. Pour cela, on ajoute au Lagrangien libre (7)

$$\mathcal{L}_{mass} = m_b(\phi_1 F_1 - \phi_2 F_2) - \frac{1}{2} m_f \overline{\psi}\psi \tag{8}$$

Montrer que $\mathcal{L}_{mass}$ est invariant sous (6) (à une dérivée totale près) à condition que $m_b = m_f$. En éliminant F_1 et F_2 du Lagrangien total, voir que l'on obtient un boson complexe et un fermion de Majorana de même masse.

- ♠ Montrer de même que le terme d'interaction dit de Wess-Zumino

$$\mathcal{L}_{WZ} = g\left[F_1(\phi_1^2 - \phi_2^2) - 2F_2\phi_1\phi_2 - \overline{\psi}(\phi_1 + i\gamma_5\phi_2)\psi\right] \tag{9}$$

est invariant sous (6) (à une dérivée totale près). On pourra utiliser l'identité $(\bar\psi\psi)(\bar\epsilon\psi) + (\bar\psi\gamma_5\psi)(\bar\epsilon\gamma_5\psi) = 0$, conséquence de l'identité de Fierz.

- Calculer le lagrangien $\mathcal{L}_{cin} + \mathcal{L}_{mass} + \mathcal{L}_{WZ}$ après élimination des champs auxiliaires (ce modèle très simple est appelé modèle de Wess-Zumino). Montrer que le potentiel scalaire peut s'écrire comme $V = \frac{1}{2}|W'(\Phi)|^2$ où W est une fonction holomorphe de Φ appelée superpotentiel. Analyser les minima du potentiel scalaire, et montrer qu'au voisinage du minimum, le boson Φ et le fermion ψ ont la même masse: la supersymétrie n'est donc pas brisée dans ce modèle.

4 Brisure spontanée de supersymétrie ♠♠♠

On va maintenant considérer une généralisation du modèle de Wess-Zumino où la supersymétrie elle-même peut être spontanément brisée.

- Montrer que le terme d'interaction

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2}\left(F\frac{\partial W}{\partial \Phi} + \overline{F}\frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{\Phi}}\right) - \frac{1}{2}\overline{\psi}\frac{\partial^2 W}{\partial \Phi^2}\psi\Big|_{\Phi=\phi_1+i\gamma_5\phi_2} \tag{10}$$

où W est une fonction *holomorphe* de $\Phi = \phi_1 + i\phi_2$, appelée “superpotentiel”, est invariant sous (6) (Pour simplifier, on supposera que W est à valeurs réelles sur l'axe réel).

- Plus généralement, pour n multiplets chiraux, on montre que le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}|\partial_\mu \Phi^i|^2 + \frac{1}{2}|F^i|^2 + \frac{i}{2}\overline{\psi}^i \gamma_\mu \partial_\mu \psi^i + \frac{1}{2}\left(F^i \frac{\partial W}{\partial \Phi^i} + \overline{F}^i \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{\Phi}^i} - \overline{\psi}^i \frac{\partial^2 W}{\partial \Phi^i \partial \Phi^j}|_{\Phi^k = (\phi_1^k + i\gamma_5 \phi_2^k)} \psi^j \right) \tag{11}$$

est invariant sous la transformation de supersymétrie (6) agissant sur chacun des multiplets chiraux. On note $M_{ij} = \Re(\frac{\partial^2 W}{\partial \Phi^i \partial \Phi^j})$ et $N_{ij} = \Im(\frac{\partial^2 W}{\partial \Phi^i \partial \Phi^j})$ les parties réelles et imaginaires de la dérivée seconde du superpotentiel.

- Calculer le potentiel des champs scalaires après élimination des champs auxiliaires. Montrer que les vides supersymétriques (i.e. invariants sous le groupe de Lorentz et sous les transformations (6)) correspondent aux extrema du superpotentiel W. Montrer que le spectre de masse autour d'un tel vide est identique pour les bosons et pour les fermions.

- Il peut arriver qu'il n'existe pas de vide d'énergie nulle, mais qu'il existe un minimum du potentiel tel que $V > 0$. Montrer que la supersymétrie est alors brisée. Calculer la matrice de masse des champs scalaires $\mathcal{M}_B^2$ et des champs fermioniques $\mathcal{M}_F$. Montrer qu'elles satisfont à la relation

$$\mathrm{S}Tr\mathcal{M}^2 := \mathrm{T}r\mathcal{M}_B^2 - \mathrm{T}r\mathcal{M}_F^2 = 0 \tag{12}$$

Montrer également que le champ $\lambda = (F_1^i - i\gamma_5 F_2^i)\psi_i$ est un champ fermionique de masse nulle, où F_1 et F_2 sont les valeurs des champs auxiliaires dans le vide considéré. Le champ λ n'est autre que le mode de Goldstone associé à la brisure spontanée de la supersymétrie fermionique.

- On considère le modèle dit de O'Raifeartaigh à trois multiplets chiraux, de superpotentiel

$$W = \lambda \Phi_1 + m\Phi_2\Phi_3 + g\Phi_1\Phi_2^2 \tag{13}$$

et on supposera les paramètres λ, m, g réels. Déterminer les minima du superpotentiel, et montrer que la supersymétrie est spontanément brisée. Calculer le spectre de masse des fluctuations au voisinage du minimum du potentiel à $\Phi_2 = 0$, et vérifier les prédictions générales ci-dessus.

[Comme l'omniprésence d'expressions du type $\phi_i + i\gamma_5\phi_2$ le suggère, les transformations de supersymétrie et leurs propriétés d'holomorphie s'expriment beaucoup plus naturellement lorsque l'on travaille dans la base des spineurs de Weyl. Il est commode d'introduire pour cela la notation à deux composantes avec indices pointés, voir par exemple "Supersymmetry and Supergravity" de J. Wess et J. Bagger, Princeton series in physics, 2nde édition]