TD 4: Quantification du champ vectoriel

On considère le champ vectoriel A_μ décrit par le Lagrangien de Proca-Stueckelberg,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}m^2 A_\mu^2 - \frac{1}{2}\lambda(\partial^\mu A_\mu)^2 \tag{1}$$

avec $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ le tenseur de courbure.

- Ecrire les équations du mouvement pour A_μ dans l'espace des impulsions, sous la forme

$$E_\mu^{\ \nu}(p)\epsilon_\nu(p) = 0 \ , \qquad A_\mu(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\epsilon_\mu(p)e^{-ip_\mu x^\mu} \tag{2}$$

où $E_\mu^{\ \nu}(p)$ est le symbole d'un opérateur différentiel $\mathbb{E}_\mu^{\ \nu}$. Le vecteur $\epsilon_\mu(p)$ représente la polarisation du mode d'impulsion p.

La fonction de Green $G_{\mu\nu}(x, x')$ du champ vectoriel est définie par la relation $\mathbb{E}_\mu^{\ \rho} \cdot G_\rho^{\ \nu} = \delta_\mu^\nu \delta^4(x - x')$. Dans l'espace des impulsions, c'est donc

$$E_\mu^{\ \rho}(p)G_\rho^{\ \nu}(p) = \delta_\mu^{\ \nu} \tag{3}$$

1 Champ vectoriel de masse nulle

- On considère d'abord le cas $m = 0, \lambda = 0$. Montrer que la matrice $E_{\mu\nu}(p)$ n'est pas inversible. Quel en est le noyau ? Montrer que le vecteur propre nul correspond à un champ A_μ de pure jauge, $A_\mu = \partial\lambda$. Vérifier que la partie longitudinale $\partial^\mu A_\mu$ découple en présence d'un courant conservé.
- Afin de rendre $E_{\mu\nu}$ inversible, on allume le terme de fixage de jauge $-\frac{1}{2}\lambda(\partial A)^2$. Déterminer $G_{\mu\nu}(p)$ dans ce cas (on pourra le chercher sous la forme imposée par l'invariance de Lorentz, $G_{\mu\nu}(p) = A(p^2)\eta_{\mu\nu} + B(p^2)p_\mu p_\nu$). Déterminer les pôles de $G_{\mu\nu}$. Y-a-t-il une prescription de contournement des pôles évidente pour obtenir le propagateur de Feynman ?
- Vérifier que le champ rayonné par un courant conservé ne dépend pas de la jauge, i.e. que

$$\int d^4y \ G_{\mu\nu}(x - y)j_\nu(y) \tag{4}$$

est indépendant de λ lorsque $\partial_\mu j_\mu = 0$.

2 Champ vectoriel massif

On revient à $\lambda = 0$, mais on allume cette fois le terme de masse $+\frac{1}{2}m^2 A_\mu^2$ (Noter le signe, différent du cas du champ scalaire).

- Montrer que l'équation du mouvement implique $\partial_\mu A_\mu = 0$. Cette condition élimine un des degrés de liberté de A_μ, et laisse les trois états d' hélicité $0, \pm 1$.
- Calculer $G_{\mu\nu}(p)$ dans ce cas $m \neq 0, \lambda = 0$. Montrer que le pôle se trouve maintenant à $p^2 = m^2$. La limite du propagateur $G_{\mu\nu}(p)$ en $m \to 0$ est-elle régulière ?
- On quantifie le champ A_μ en le développant selon

$$A_\mu = \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3 k_0} \sum_{i=1..3} a_i(k)\epsilon^i_\mu(k) e^{-ikx} + a_i^\dagger(k)\epsilon^i_\mu(k)e^{ikx} \tag{5}$$

où $k_0 = \sqrt{k^2 + m^2}$ et ϵ^i_μ sont trois vecteurs de genre espace orthogonaux entre eux et au vecteur k:

$$\epsilon^i \cdot \epsilon^j = \delta^{ij} \ , \qquad \sum_{i=1..3} \epsilon^i_\mu \epsilon^i_\nu = -(\eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m^2) \tag{6}$$

Les oscillateurs satisfont $[a_i(k), a_j^\dagger(k')] = \delta_{ij} 2k_0 (2\pi)^3 \delta^3(k-k')$. Montrer que le commutateur du champ A_μ aux points x, y est donné par

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = i\,(\eta_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu /\, m^2)\,(G_r(x-y) - G_a(x-y)) \tag{7}$$

où G_r et G_a sont les propagateurs avancés et retardés d'un champ scalaire de masse m. En déduire les propriétés d'invariance de Lorentz et de causalité.

- Montrer que le produit T-ordonné est donné par

$$\langle 0|T A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle = -i\,(\eta_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu /\, m^2) G^F(x-y) - \frac{2i}{m^2}\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}\delta^4(x-y) \tag{8}$$

où G_F est le propagateur de Feynman d'un champ scalaire de masse m Le terme de contact (dit terme de Schwinger) est non-covariant, il est en général absorbé dans une redéfinition du produit T-ordonné.

- On allume à la fois le terme de masse et le terme de fixage de jauge. Montrer que le champ $A^T_\mu = A_\mu + \lambda/m^2 \partial_\mu\partial_\nu A_\nu$ est sans divergence, tandis que la divergence $\partial_\mu A_\mu$ satisfait l'équation de Klein-Gordon avec une masse $m/\sqrt{\lambda}$. Montrer que le propagateur de Feynman correspond à la propagation d'un mode transverse de spin 1 et masse m et d'un mode scalaire longitudinal de masse $m/\sqrt{\lambda}$, mais de norme négative.

3 Boson vecteur topologiquement massif

A 2+1 dimensions, on peut ajouter à l'action de Maxwell un terme topologique dit de Chern-Simons (il ne dépend pas de la métrique, et ne contribue pas au tenseur énergie impulsion):

$$L = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + \frac{m}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \tag{9}$$

Ce terme est-il compatible avec l'invariance de jauge ? Calculer le propagateur, après avoir introduit un terme de fixage de jauge $-\frac{1}{2}\lambda(\partial A)^2$. Montrer que le pôle correspond à la propagation d'une particule de masse m. Retrouver ce résultat en déterminant l'équation satisfaite par le champ pseudoscalaire $B_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho}$. [*Le terme de Chern-Simons entre de manière importante dans la description de l'effet Hall quantique et des statistiques anyoniques, voir e.g. A. Zee, cond-mat/9501022*]

4 Mécanisme de Higgs

On a vu dans le TD2 que la brisure de symétrie globale conduisait (classiquement) à l'existence d'une particule scalaire de masse nulle, le boson de Goldstone. On considère maintenant une brisure de symétrie locale: soit un champ scalaire complexe couplé à un boson vecteur,

$$L = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + |\partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi|^2 - V(|\phi|) \tag{10}$$

On suppose que $V(|\phi|)$ admet un minimum en $|\phi| = \phi_0$ non nul. En paramétrisant $\phi(x) = \rho(x)e^{i\theta(x)}$ et en développant au voisinage de $\rho = \phi_0$, montrer que le spectre perturbatif correspond à la propagation d'un boson vectoriel de masse $2e\phi_0$, et d'un boson scalaire réel de masse $(1/2)\sqrt{V''(\phi_0)}$. En particulier, le boson de Goldstone de masse nulle n'existe plus, mais en devenant massif le boson vecteur a acquis un degré supplémentaire d'hélicité nulle: on dit que le boson de jauge est devenu massif en "mangeant" un degré de liberté du boson scalaire complexe. On a ainsi obtenu un boson vectoriel massif tout en préservant l'invariance de jauge dans le Lagrangien. *[Le mécanisme de Higgs intervient aussi bien dans la superconductivité pour décrire l'effet Meissner d'éjection des lignes de champ magnétique, qu'en physique des particules pour décrire la brisure de symétrie electrofaible.]*