TD3: Effet Casimir

En théorie quantique des champs, même en l'absence d'interactions, la sommation de l'énergie de point zéro sur une infinité de modes conduit à une énergie du vide divergente. En l'absence de couplage à la gravitation, on peut en principe soustraire cette énergie infinie à la main, mais sa variation en fonction du volume ou des conditions aux limites conduit à des forces finies et observables: c'est l'effet Casimir.

1 Champ scalaire de masse nulle

Dans cette section, on considère le cas (non physique) d'un champ scalaire réel de masse nulle. Afin de supprimer les divergences infrarouges, on travaille en volume fini, dans un parallélépipède de section $L \times L \times R$.

• On impose des conditions aux limites de Dirichlet, c'est-à-dire $\phi = 0$ à tout temps sur les bords de la boîte. Déterminer les modes et fréquences propres ω_{mnp} du champ ϕ satisfaisant ces conditions. Ecrire formellement l'énergie $E(R, L)$ associée aux fluctuations quantiques autour du vide. Quelle est l'origine de la divergence ?

• Afin de donner un sens à cette expression, on régularise la somme sur les impulsions en insérant un facteur de convergence $e^{-\omega/\Lambda}$, i.e.

$$E_\Lambda(R, L) = \sum_{m,n,p} \frac{1}{2}\, \hbar\, \omega_{mnp}\, e^{-\omega_{mnp}/\Lambda} \tag{1}$$

où le cut-off Λ à les dimensions d'une énergie. Montrer dans la limite où la taille transverse L est très grande, l'énergie de point zéro dans la boîte de longueur R peut s'écrire

$$E_\lambda(R, L) \sim \frac{\pi^2 \hbar c L^2}{4R} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left(\frac{R/\alpha}{e^{\alpha/R} - 1} \right) \tag{2}$$

où on dénote $\alpha = \pi/\Lambda$. (Indication: on pourra approximer la somme sur m, n par une intégrale, et faire le changement de variables $u = \sqrt{(m^2 + n^2)/L^2 + (p^2/R^2)}$).

• Montrer que l'énergie $E_\Lambda(R, L)$ diverge comme Λ^4 dans la limite $\Lambda \to \infty$, et calculer les termes sous-dominants jusqu'au terme fini. On pourra utiliser l'expansion en série de Taylor

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \tag{3}$$

qui définit les nombres de Bernoulli B_n, avec $B_0 = 1, B_1 = -1/2, B_2 = 1/6, B_4 = -1/30$, et $B_{2n+1} = 0$ pour tout $n \geq 1$.

• Les divergences ultraviolettes à $\Lambda \to \infty$ apparaissent parce qu'on n'a pas considéré un processus réellement physique. Pour remédier à cela, on place de chaque côté de la boîte de longueur R deux boîtes de longueur très grande $R' \gg R$, et on s'intéresse aux variations de l'énergie à longueur totale fixée:

$$\Delta E = E_(R+\delta) + 2E_(R'-\delta/2) - E(R) - 2E(R'), \qquad \delta \ll R \ll R' \tag{4}$$

où on sous-entend la dépendence en Λ et L. Montrer que ΔE est fini dans la limite de cutoff infini, et en déduire la force exercée sur les parois centrales par unité de surface. *La réponse:*

$$f = -\frac{\pi^2 \hbar c}{480\ R^4} \tag{5}$$

• Afin de se convaincre que ce résultat ne dépend pas de la régularisation, refaire ce calcul avec une fonction de cut-off $f(\omega)$ arbitraire,

$$E_f(R,\Lambda) = \sum_{m,n,p} \frac{1}{2}\ \hbar\ \omega_{mnp}\ f(\omega_{mnp}) \tag{6}$$

telle que $f(0) = 1$, toutes les dérivées $f^{(n)}$ s'annulent à 0 et $f(\omega) \to 0$ lorsque $\omega \to \infty$. On pourra utiliser la formule d'Euler-MacLaurin

$$\sum_{m=0}^{\infty} F(m) - \int_0^\infty F(m)\ dm = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k\ !} F^{(k-1)}(0) \tag{7}$$

appliquée à la fonction

$$F(x) = \int_x^\infty y^2\ f(\pi y/R)\ dy \tag{8}$$

• Un autre schéma de régularisation s'avère très commode en théorie quantique des champs: la régularisation dimensionelle. Calculer l'énergie de point zéro $E_n(R,L)$ pour une boîte parallélépipèdique à $n+1$ dimensions spatiales, de taille $R \times L^n$. On utilisera la représentation de Schwinger déjà introduite au TD 2,

$$\omega^{-s} = \frac{\pi^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+s}} \exp\left(-\pi\omega/t\right) \tag{9}$$

avant de faire l'intégrale sur les moments transverses. On exprimera le résultat en fonction de la fonction $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ d'Euler, et de la fonction $\zeta(s) = \sum_{m=1}^\infty m^{-s}$ de Riemann. *La réponse:*

$$E_n(R) = \frac{-L^n}{4\sqrt{\pi}(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{\pi}{R}\right)^{n+1} \Gamma\left(-\frac{n+1}{2}\right) \zeta(-n-1) \tag{10}$$

Les fonctions $\Gamma(z)$ et $\zeta(s)$ sont définies par continuation analytique à partir de leur domaine de convergence. En utilisant $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}, \Gamma(-3/2) = 4\sqrt{\pi}/3, \zeta(-3) = 1/120$, retrouver le résultat trouvé plus haut pour la force de Casimir.

2 Effet Casimir du champ de Maxwell

On considère maintenant le champ de Maxwell dans la même géométrie que ci-dessus, où les bords de la boîte sont maintenant supposés être des plaques parfaitement conductrices. Les conditions aux limites sont alors

$$E_{\parallel} = B_{\perp} = 0 \tag{11}$$

• Ecrire les modes propres du champ électromagnétique satisfaisant à ces conditions. On pourra traiter la cavité comme un guide d'onde selon la direction z, et utiliser la base des modes TE (*transverse electric*) et TM (*transverse magnetic*)

$$TE : \qquad E_z = 0 \text{ partout } \quad , \quad \partial_{\perp} B_z = 0 \text{ au bord} \tag{12}$$

$$TM : \qquad B_z = 0 \text{ partout } \quad , \quad E_z = 0 \text{ au bord} \tag{13}$$

• Déduire du calcul de la section l'effet Casimir du champ de Maxwell. Numériquement, on obtient une force attractive, $f \sim -4.05 MeV.fm/R^4$. *Cette force a pu être mesurée directement par Sparnay (Physica* **24** *(1958) 751) Pour qu'elle ne soit pas dominée par l'attraction électrostatique entre les électrons de la plaque, il est nécessaire que la densité d'électrons excédentaires soit inférieure à* $1/R^2$*, ce qui impose de considérer des distances inférieures au micron.*

3 Exercices supplémentaires

Exercice 1 *(Autres conditions de bord)*
Calculer l'effet de Casimir du champ scalaire réel de masse nulle dans la géométrie ci-dessus pour des conditions de bord périodiques, puis de Neumann ($\partial_{\perp}\phi = 0$)

Exercice 2 *(Champ de Dirac)* On considère un champ de Dirac de masse nulle dans la même géométrie que ci-dessus, et on impose la condition de bord

$$(1 + \ i \ n_{\mu}\gamma^{\mu})\psi = 0 \tag{14}$$

où n^{μ} est le quadrivecteur normal au bord, orienté vers l'exterieur. Déterminer les modes et fréquences propres (directement dans la limite $L \to \infty$) et en déduire la force que la force Casimir du champ de Dirac est 7/4 fois supérieure (et du même signe) à celle du champ scalaire réel (5). (On pourra utiliser la représentation de Schwinger, et l'identité $\sum_{n=0}^{\infty}(n + \frac{1}{2})^{-s} = (2^s - 1)\zeta(s)$, $\zeta(-3) = 1/120$.) *Cet effet est inobservable dans le cas de l'électron, mais il intervient en physique nucléaire dans le cadre du modèle "MIT bag model" pour les hadrons, où les champs de quarks sont confinés dans une boule avec les conditions de bord ci-dessus.*