TD2: Quantification canonique du champ scalaire

On considère l'équation de Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \ , \quad \Box := \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \partial_i^2 \tag{1}$$

d'abord au niveau classique, puis au niveau quantique.

1 Champ de Klein-Gordon classique

Un outil essentiel dans l'étude d'une équation aux dérivées partielles linéaire est la fonction de Green (ou "propagateur"), solution de l'équation en présence d'une source de Dirac:

$$(\Box + m^2)G(x, t; x_0, t_0) = \delta^{(4)}(x - x_0, t - t_0) \tag{2}$$

Par invariance de translation, G ne dépend que de $x-x_0$ et $t-t_0$, on écrira $G(x-x_0, t-t_0)$. G est défini à une solution de l'équation homogène (1) près.

Exercice 1 *Propagateurs avancé et retardé*
Trouver l'expression de G dans l'espace des impulsions. Pour revenir dans l'espace des positions, il faut définir une prescription d'intégration pour éviter les pôles à $p_0 = \pm\sqrt{p_i^2 + m^2}$. On pose

$$G_r(x) = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip_\mu x^\mu}}{(p_0 + i\epsilon)^2 - p_i^2 - m^2} \tag{3}$$

$$G_a(x) = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip_\mu x^\mu}}{(p_0 - i\epsilon)^2 - p_i^2 - m^2} \tag{4}$$

Montrer que $G_r(x)$ est nul pour $x^0 < 0$ (propagateur retardé), et que $G_a(x)$ est nul pour $x^0 > 0$ (propagateur avancé). Montrer que $G_r(x)$ et $G_a(x)$ sont à valeurs réelles.

Exercice 2 A l'aide du théorème des résidus, exprimer $G_r(x)$ et $G_a(x)$ en termes des fonctions de Wightman

$$G^+(x) = \int \frac{d^3p}{2(2\pi)^3 p_0} \, e^{-ip_\mu x^\mu} \ , \quad G^-(x) = G^+(-x) \tag{5}$$

where $p_0 = \sqrt{p_i^2 + m^2}$. Montrer que $G^\pm(x)$ est invariant sous le groupe de Lorentz orthochrone. En déduire que $G^\pm(x)$ est fonction paire de x^μ si x^μ est de genre espace. Conclure que $G_r(x)$ et $G_a(x)$ sont à support dans le cône de lumière futur et passé respectivement.

Exercice 3 Calculer explicitement $G_r(x)$ pour un champ scalaire de masse nulle. On pourra passer en coordonnées sphériques. Le résultat:

$$G_r(x) = \frac{1}{2\pi}\theta(x^0)\delta(x^2) \tag{6}$$

Exercice 4 ♠ Calculer G^+ pour $m^2 > 0$ pour x^μ de genre espace. On pourra utiliser la representation intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{p_i^2 + m^2}} = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-(p_i^2 + m^2)t\right) \tag{7}$$

et la définition de la fonction de Bessel modifiée K_s,

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+s}} e^{-at-b/t} = 2\left(\frac{a}{b}\right)^{s/2} K_s(2\sqrt{ab}) \tag{8}$$

Vérifier que G^+ décroît exponentiellement hors du cône de lumière (on donne $K_s(z) \sim \sqrt{\pi/(2z)}e^{-z}$ pour $z \to +\infty$).

Exercice 5 (*Propagateur de Feynman.*)
On considère maintenant un choix intermédiaire entre G_r et G_a,

$$G_F(x) = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p_0^2 - p_i^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{9}$$

L'exprimer en termes de $G^\pm$. Le propagateur de Feynman G_F est-il à valeur réelles ? pair ? à support dans le cône de lumière ? Montrer que G_F propage les fréquences positives (particules) vers les temps positifs, et les fréquences négatives (antiparticules) vers les temps négatifs. *G_F intervient de manière essentielle dans le calcul des amplitudes de diffusion dans la théorie quantique.* Noter aussi que G_F est une fonction méromorphe en l'invariant cinématique p^2.

Exercice 6 ♠ (*Problème aux conditions initiales.*)
La fonction de Green permet en particulier d'obtenir la solution $\phi(x,t)$ en terme des données initiales ϕ et $\partial_t\phi$ sur la surface de Cauchy $t = t_0$ (des surfaces de Cauchy plus générales sont-elles possibles ?). Pour trouver cette solution, on va utiliser le théorème de Green,

$$\int_V \left(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\right) d^3x = \oint_{\partial V} \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) d^2S \tag{10}$$

où V est un domaine de R^3, ∂V sa frontière, et n son vecteur normal dirigé vers l'extérieur. On va intégrer cette relation entre $t_0 < t$ et $t_1 > t$, et utiliser pour ψ le propagateur retardé $G_r(x' - x, t' - t)$.

• En utilisant les équations 1 et 2 et en intégrant par parties par rapport au temps, montrer que le premier membre intégré entre t_0 et t_1 se ramène à

$$\phi(x,t) - \int_V d^3x' \left(G_r \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial G_r}{\partial t} \right) \Big|_{t=t_0} d^2S \tag{11}$$

(justifier en particulier que le bord à $t = t_1$ ne contribue pas).

• On choisit un domaine V tel que ϕ et $\partial_t \phi$ s'annulent en dehors de V. En déduire que le second membre s'annule, et obtenir la solution au problème de Cauchy à conditions initiales.

Exercice 7 (*Champ émis par une source classique.*)
La fonction de Green permet aussi de calculer le champ émis par une source classique couplée au champ de Klein-Gordon:

$$(\Box + m^2)\phi = j(x,t) \tag{12}$$

où $j(x)$ est une source externe dépendante du temps, que l'on suppose nulle en dehors d'un intervalle $[t_0, t_1]$. On suppose que le champ (toujours classique) ϕ s'annule à $t < t_0$. Montrer que

$$\phi(x,t) = \int d^3x' dt' \; G_r(x - x', t - t') j(x', t') \tag{13}$$

est solution du problème. Calculer la variation dE/dt de l'énergie totale du champ scalaire. En déduire l'énergie injectée par le courant j dans le système à $t = t_1$.

2 Quantification du champ scalaire complexe

On considère maintenant le champ scalaire libre *complexe*, décrit par l'action

$$S = \int d^4x \; \left[|\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 \right] \tag{14}$$

Exercice 8 *Formalisme canonique classique*

• Calculer les moments conjugués $\bar{\pi}, \pi$ aux champs $\phi, \bar{\phi}$ respectivement. Montrer que la donnée des champs $\phi, \bar{\phi}, \pi, \bar{\pi}$ à l'instant $t = 0$ détermine ces champs à tout instant.

• Montrer que ϕ et $\bar{\pi}$ (à $t = 0$) sont canoniquement conjugués pour le crochet de Poisson

$$\{F, G\} = \int d^3x \left(\frac{\partial F}{\partial \phi(x)} \frac{\partial G}{\partial \bar{\pi}(x)} - \frac{\partial G}{\partial \phi(x)} \frac{\partial F}{\partial \bar{\pi}(x)} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\phi}(x)} \frac{\partial G}{\partial \pi(x)} - \frac{\partial G}{\partial \bar{\phi}(x)} \frac{\partial F}{\partial \pi(x)} \right) \tag{15}$$

où la restriction à $t = 0$ est implicite.

Exercice 9 (*Développement en oscillateurs*)

- Il est souvent plus commode de considérer les modes de Fourier

$$\phi(x,0) = \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3 k_0}\left[a(k)e^{-ik_ix^i} + \bar{b}(k)e^{ik_ix^i}\right] \quad (16)$$

$$\pi(x,0) = i\int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3}\left[a(k)e^{-ik_ix^i} - \bar{b}(k)e^{ik_ix^i}\right] \quad (17)$$

Exprimer les oscillateurs $a(k), b(k), \bar{a}(k), \bar{b}(k)$ en fonction des champs $\phi, \bar{\phi}, \pi, \bar{\pi}$ à $t = 0$. Calculer leur crochets de Poisson.

- Exprimer le Hamiltonien en termes des oscillateurs. En déduire leur évolution temporelle, et l'expansion de Fourier du champ $\phi(x,t)$ à tout instant. $(\bar{a}, \bar{b})$ et (a, b) sont dits oscillateurs de fréquence positive et négative respectivement.

- Rappeler le courant de Noether j_μ associé à la symétrie globale $\phi \to e^{i\alpha}\phi$. Calculer la charge conservée $Q = \int d^3x\ j_0$ en terme des oscillateurs.

Exercice 10 (*Quantification canonique*)

On applique maintenant la procédure de quantification canonique: on remplace les champs canoniques $\phi(x,0)$ etc par des opérateurs, leur complexe conjugué par leur hermitien conjugué ($\bar{\phi}(x) = [\phi(x)]^\dagger$) et le crochets de Poisson par i fois le commutateur:

$$[a(k), \bar{a}(k')] = 2k_0(2\pi)^3\delta^3(k-k') \quad (18)$$

$$\left[b(k), \bar{b}(k')\right] = 2k_0(2\pi)^3\delta^3(k-k')\ , \quad (19)$$

les autres commutateurs étant 0. Les opérateurs $(a(k), b(k))$ et $(\bar{a}(k), \bar{b}(k))$ peuvent maintenant être représentés comme des opérateurs de création et annihilation dans un espace de Fock, construit à partir d'un état du vide $|0\rangle$ annihilé par tous les $a(k)$ et $b(k)$. On adopte aussi une prescription d'ordre normal pour le Hamiltonien. Montrer que l'opérateur de charge électrique $Q = \int d^3k/[2k_0(2\pi)^3](\bar{a}a - \bar{b}b)$ et l'opérateur nombre de particules $N = \int d^3k/[2k_0(2\pi)^3](\bar{a}a + \bar{b}b)$ commutent avec le Hamiltonien. Qu'en est-il en présence d'un potentiel non trivial $V(|\phi|^2)$?

Exercice 11 (*Commutateurs et causalité*)

- Vérifier que les fonctions de Wightman $G^\pm$ sont données par les valeurs moyennes dans le vide

$$G^+(x-x') = \langle 0|\phi(x)\bar{\phi}(x')|0\rangle\ , \quad G^-(x-x') = \langle 0|\phi(x')\bar{\phi}(x)|0\rangle \quad (20)$$

- Exprimer le commutateur

$$\Delta(x-x') := \left[\phi(x), \bar{\phi}(x')\right] \quad (21)$$

en terme des fonctions de Wightman, et en déduire que les champs $\phi(x)$ et $\bar{\phi}(x')$ commutent pour une séparation $x - x'$ de genre espace.

• Exprimer $\Delta(x-x')$ en fonction des propagateurs avancés et retardés, et en déduire que $\Delta(x - x')$ est une solution de l'équation de Klein-Gordon homogène.

• Vérifier que $\partial_t \Delta(x,t)|_{t=0} = i\delta^3(x)$. En déduire que les relations de commutations à temps égal entre ϕ et π sont bien vérifiées.

Exercice 12 (*Produit ordonné et propagateur de Feynman*)

• On introduit le produit ordonné

$$T(\phi(x,t)\bar{\phi}(x',t')) := \theta(t-t')\phi(x,t)\bar{\phi}(x',t') + \theta(t'-t)\bar{\phi}(x',t')\phi(x,t) \tag{22}$$

où $\theta(t)$ est la fonction de Heaviside, $\theta(t) = 1$ si $t > 0$, 0 sinon. Montrer formellement que c'est une fonction de Green (à valeur opératorielle),

$$(\Box_x + m^2)T(\phi(x,t)\bar{\phi}(x',t')) = i\delta^{(4)}(x - x', t - t') \tag{23}$$

Montrer que la valeur moyenne dans le vide est en fait donnée par le propagateur de Feynman,

$$\langle 0|T(\phi(x,t)\bar{\phi}(x',t'))|0\rangle = i\ G_F(x - x') \tag{24}$$

Les valeurs moyennes dans le vide de produits T-ordonnés de champ sont égales aux fonctions de corrélation dans le formalisme de l'intégrale fonctionnelle.

3 Exercices complémentaires

Problème 13 ♠*Propagateur non relativiste*

On considère l'équation de Schrödinger

$$i\frac{d\psi}{dt} = H\psi = \left(-\frac{1}{2m}\Delta + V(x)\right)\psi \tag{25}$$

• Montrer que si $\psi_n(x)$ est une base d'états propres de H normalisée et complète, au sens où $\sum_n \bar{\psi}_n(x)\psi_n(x') = \delta(x - x')$, alors

$$G_r(x', t'; x, t) = -i\theta(t' - t)\sum_n \psi_n(x)\psi_n(x')e^{iE_n(t'-t)} \tag{26}$$

est la fonction de Green retardée associée à (25)

• Calculer le propagateur retardé pour la particule libre ($V = 0$), directement ou en utilisant (26). Le résultat:

$$G_r(x', t'; x, t) = -i\theta(t' - t) \left(\frac{m}{2\pi i(t' - t)} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{im|x - x'|^2}{2(t' - t)} \right) \tag{27}$$

Existe-t-il un analogue au propagateur de Feynman ?

Problème 14 ♠♠ (*Théorie des champs à température finie*)
A température nulle, les observables naturelles sont données par les valeurs moyennes dans le vide $\langle 0|\phi(x)|0\rangle$ étudiées dans la section 2. A température finie, il est nécessaire de sommer les valeurs moyennes sur tous les états $|i\rangle$ d'énergie E_i, pondérées par le poids de Bolztman $e^{-\beta E_i}$ où $\beta = 1/(k_B T)$:

$$\langle \phi(x) \rangle_\beta = \frac{1}{Z} \sum_i \langle i|\phi(x)|i\rangle e^{-\beta E_i} = \frac{1}{Z} \mathrm{Tr}[\rho \phi(x)] \tag{28}$$

où $\rho = e^{-\beta H}$ est la matrice-densité décrivant l'état mixte thermal, et $Z = \mathrm{Tr}\rho$ est la fonction de partition canonique.

• On définit les fonctions de Wightman à température finie (pour un champ scalaire réel)

$$G^+_\beta(x, x') = \langle \phi(x)\phi(x') \rangle_\beta \ , \quad G^-_\beta(x, x') = \langle \phi(x')\phi(x) \rangle_\beta \ , \tag{29}$$

Vérifier que

$$G^\pm_\beta(t, x; t', x') = G^\mp_\beta(t + i\beta, x; t', x') \tag{30}$$

• En remarquant que $\Delta(x, x') = G_+(x, x')_\beta - G_-(x, x')_\beta$ est indépendant de la température β, vérifier que les coefficients $g_+(\omega), g_-(\omega)$ et $\Delta(\omega)$ apparaissant dans la décomposition de Fourier de $G^+_\beta, G^-_\beta, \Delta$ par rapport à $t - t'$ vérifient

$$\Delta(\omega) = g^+(\omega) - g^-(\omega) \ , \quad g^+(\omega) = e^{\beta\omega} g^-(\omega) \tag{31}$$

• En déduire que les fonctions de Wightman

$$G^\pm_\beta(t, x; t', x') = \mp \sum_{k=1}^{\infty} \Delta(t \pm ik\beta, x; t', x') \tag{32}$$

sont périodiques en temps imaginaire.