

Compactification toroidale

1. Mécanisme de Kaluza Klein en théorie des champs

On considère une théorie des champs en dimensions D , dans un espace-temps $\mathbb{R}^{1, D-2} \times S_1(R)$

où S_1 est un cercle de rayon R .

La relation de dispersion $p^2 = -M^2$ dans $\mathbb{R}^{1, D-1}$

reste valable :

$$-p_0^2 + \sum_{i=1}^{D-2} p_i^2 + p_{D-1}^2 = -M^2$$

Le moment p_{D-1} est quantifié, de sorte que la fonction d'onde $e^{i p_{D-1} x^{D-1}}$ soit univalente sur S_1 : $x^{D-1} \rightarrow x^{D-1} + 2\pi R$

$$p_{D-1} = \frac{m}{R}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Plus généralement, si la particule dans $\mathbb{R}^{1, D-1}$ a une charge q sous un champ de jauge A_μ , et si la ligne de Wilson

$$\int_0^{2\pi} A_{D-1} dx^{D-1} \equiv 2\pi \chi$$

est non triviale,

$$p_{D-1} = \frac{m}{R} - \frac{q\chi}{2\pi R}$$

de sorte que la fonction d'onde $e^{i p_{D-1} x^{D-1}}$ se transforme par une phase $e^{-iq\chi}$; $R\mathbb{K} : q \in \mathbb{Z} \Rightarrow \chi$ est équivalent mod 2π

(on peut aussi le voir en première quantification :

$$S = \int dt \frac{1}{2e} (\dot{x}^\mu)^2 - \frac{m^2 e}{2} + q A_{D-1} \dot{x}^{D-1}$$

$$\Pi_{D-1} = \frac{\dot{x}^{D-1}}{e} + q A_{D-1} = \frac{m}{R}$$

$$H = e \left((\dot{x}^\mu)^2 + m^2 \right) = e \left(p_\mu^2 + \left(\frac{m}{R} - qA \right)^2 + m^2 \right)$$

Du point de vue des $D-1$ dimensions non compactes, on a donc

$$M_{D-1}^2 = M^2 + \left(\frac{m}{R} - \frac{q\chi}{2\pi R} \right)^2 :$$

une tour d'excitations dites de Kaluza-Klein.

Le changement adiabatique $\chi \rightarrow \chi + 2\pi$ entraîne un "flot spectral" $m \rightarrow m - q$ sans affecter le spectre.

Si $M=0$ et $q=0$, l'état fondamental est de masse nulle, et accompagné de résonances à $M_{D-1} = \frac{|m|}{R}$.

La théorie effective des états de masse nulle est obtenue par réduction dimensionnelle : i.e. en supposant que tous les champs sont indépendants de x^{D-1} (c'est une truncation consistante : toutes les solutions de ce lagrangien en dimension $D-1$ sont des solutions en dimension D)

$$\text{ex } S_D = \int d^D x \sqrt{-G} \left(\frac{R_D}{\kappa^2} + \partial_m \phi G^{mn} \partial_n \phi - \frac{1}{4} F_{mn} G^{mp} G^{nq} F_{pq} \right)$$

$$G_{mn} dx^m dx^n = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + R^2 (d\phi + \omega_\mu dx^\mu)^2$$

$$G^{mn} \partial_m \otimes \partial_n = g^{\mu\nu} (\partial_\mu - \omega_\mu \partial_\phi) (\partial_\nu - \omega_\nu \partial_\phi) + \frac{1}{R^2} \partial_\phi \otimes \partial_\phi$$

et on se restreint au secteur $\partial_\phi = 0$.

$$\text{On admet que } R_D(G) = R_{D-1}(g) - \frac{2}{R} DR - \frac{R^2}{4} F_{\mu\nu}^2$$

$$\text{où } F_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu; \text{ moreover } F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m \begin{matrix} \nearrow F_{\mu\nu} \\ \searrow \partial_\mu A \end{matrix}$$

$$S_D = \int d^D x R \sqrt{-g} \left(\frac{1}{\kappa^2} R_{D-1} - \frac{2}{R} DR - \frac{R^2}{4} F_{\mu\nu}^2 + (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{4R^2} (\partial_\mu A)^2 \right)$$

Ainsi :

	scalaire $\phi \rightarrow$ scalaire ϕ
	vecteur $A \rightarrow$ vecteur $A_\mu +$ scalaire A
	métrique $G \rightarrow$ métrique $g_{\mu\nu} +$ vecteur $\omega_\mu +$ scalaire R

Dans le secteur fermionique : (Rappel: pas de chiralité en dim impaire) ③

si D est pair : spineur de Weyl \rightarrow spineur

si D est impair : spineur \rightarrow spineur de Weyl gauche
 \oplus spineur de Weyl droit

Cependant, il faut faire un choix de périodicité pour le spineur autour de S_1 :

"Ramond" : périodique , $\mathcal{P}_{D-1} = \frac{m}{R}$, $m \in \mathbb{Z}$

"Neveu Schwarz" : anti-périodique $= \frac{m+1/2}{R}$ $m \in \mathbb{Z}$

(ce qui est équivalent à $\chi = \pi$ pour la charge associée au nombre périodique)

Seul "Ramond" préserve la supersymétrie, en fournissant un gravitino de masse nulle.

Rq : si l'espace-temps est asymptotiquement $\mathbb{R}_{1,D-2} \times S_1(R)$,
et si le cercle $S_1(R)$ est contractible dans la géométrie complète :



alors le seul choix possible de périodicité est "Neveu Schwarz":

c'est le cas à température finie, où $R = \frac{1}{2\pi T}$:

la supersymétrie est brisée, mais de manière douce ;

Si la brisure disparaît dans la limite $R \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 0$

* L'unification de $\omega_p =$ champ de Maxwell et $g_{\mu\nu} =$ graviton serait prometteuse, mais hélas ne marche pas :

- nécessité d'un champ scalaire de masse nulle ϕ , \neq Higgs!
- impossibilité d'obtenir une théorie chiral

le pb de la stabilisation des modules reste d'actualité

* Tout ceci se generalise aisement au cas où

$$M_b = M_{p+1} \times T^n$$

↑ base de dimension n

le secteur de masse nulle correspond au cas où tous les champs sont independants de T^n :

$$G_{mn} dx^m dx^n = g_{\mu\nu}^{(x)} dx^\mu dx^\nu + g_{IJ}^{(x)} (dy^I + \omega^I_\nu dx^\nu) (dy^J + \omega^J_\nu dx^\nu)$$

g_{IJ} est une matrice symétrique réelle, définie positive :

on peut la voir comme un élément de

$$\mathbb{R}^+ \times \underbrace{SO(n, \mathbb{R})}_{\text{forme } e}$$

↑ volume V \hat{g}_{IJ}

$$g_{IJ} = V^{2/n} e^a_I e^a_J = V^{2/n} (e^t e)_{IJ}$$

$e^t e$ est invariant sous $e \rightarrow ke, k \in SO(n, \mathbb{R})$

On a à nouveau

$$* R_D = R_{D-n} + \alpha \partial_\mu \hat{g}_{IJ} \partial^\mu \hat{g}^{IJ} + \beta \left(\frac{\partial_\mu V}{V} \right)^2 + \gamma (F_{\mu\nu}^I)^2$$

avec $F_{\mu\nu}^I = \partial_\mu \omega^I_\nu - \partial_\nu \omega^I_\mu$: vecteurs de Kaluza Klein.

\hat{g}_{IJ} décrit un "modèle σ non linéaire $SO(n) \setminus SE(n)$ "

* si F_{mn} est un champ non abélien en dimension D,

$$F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m + [A_m, A_n]$$

on obtient un potentiel pour les composantes scalaires $[A_I, A_J]^2$

Ainsi

- scalaire $\phi \rightarrow$ scalaire ϕ
- vecteur $A_m \rightarrow$ vecteur $A_\mu + n$ scalaires $A_I +$ potentiel
- métrique $G_{mn} \rightarrow$ métrique $g_{\mu\nu} + \frac{n(n+1)}{2}$ scalaires V, \hat{g}_{IJ}
- spinors $\psi \rightarrow 2^{\frac{n}{2}}$ spinors à valeur dans $\frac{GL(n, \mathbb{R})}{SO(n, \mathbb{R})}$

* Jusqu'à présent, nous avons décrit la réduction dimensionnelle, qui est valable classiquement, dans la limite $R \rightarrow \infty$

Au niveau quantique, il faut tenir compte des effets virtuels des excitations de Kaluza-Klein :

$$\sum_n \frac{\phi_0}{\phi_n} \text{---} \phi_0$$

En présence du graviton, on retrouve les divergences UV habituelles. Néanmoins, on attend que la symétrie $SL(n, \mathbb{Z})$ subsistera au niveau quantique : c'est le groupe des difféomorphismes du tore T^n . (pour $n=1$, c'est juste l'identité).

* Plus généralement encore, on pourrait considérer

$$M_D = M_{p+1} \times M_n$$

↑ variété compacte arbitraire

les modes de masse minimale dans $\mathbb{R}^{1,p}$ correspondent aux modes harmoniques sur M_n .

En particulier, l'existence de SUSY dans $\mathbb{R}^{1,p}$ est liée à l'existence de spineurs harmoniques sur M_n . \rightarrow espaces de Calabi-Yau...

2. Compactification toroidale de la corde bosonique fermée.

Décrivons la théorie conforme d'un boson compact réel X :
sur le cylindre,

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau) + 2\pi n R \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$X = x + l_s^2 p \tau + n R \sigma + \frac{i l_s}{\sqrt{2}} \sum_{k \neq 0} \frac{\alpha_k}{k} e^{-ik(\tau - \sigma)} + \frac{i l_s}{\sqrt{2}} \sum_{k \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_k}{k} e^{-ik(\tau + \sigma)}$$

soit
$$X_L = \frac{x}{2} + \frac{l_s^2}{2} \tilde{P}_L(\tau + \sigma) + \dots$$
$$X_R = \frac{x}{2} + \frac{l_s^2}{2} P_R(\tau - \sigma) + \dots$$

$$p = \frac{P_L + P_R}{2} = \frac{m}{R}$$
 pour que la fonction d'onde $e^{i p X}$ soit périodique

~~soit~~
$$\frac{P_L - P_R}{2} = \frac{n R}{l_s^2} \quad : \quad n \text{ est le nombre d'enroulement}$$

On a donc

$$L_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{m l_s}{R} + \frac{n R}{l_s} \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k} \alpha_k$$

$$\tilde{L}_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{m l_s}{R} - \frac{n R}{l_s} \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-k} \tilde{\alpha}_k$$

La fonction de partition est donc

$$Z(R) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{q^{\frac{1}{2} P_L^2} \bar{q}^{\frac{1}{2} P_R^2}}{\eta \bar{\eta}}$$

$$P_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m l_s}{R} + \frac{n R}{l_s} \right)$$

$$P_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{m l_s}{R} - \frac{n R}{l_s} \right)$$

$$= \frac{1}{|\eta|^2} \sum_{m,n} e^{-\pi \tau_2 \left(\frac{m^2 l_s^2}{R^2} + \frac{n^2 R^2}{l_s^2} \right) + 2\pi i m n \tau_1}$$

(formulation hamiltonienne)

Pour vérifier l'invariance modulaire, effectuons une resommation de Poisson par rapport à l'entier m :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) = \sum_{\tilde{m} \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\tilde{m})$$

où $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(m) e^{2\pi i m x}$ est la transf. de Fourier

Rk c'est équivalent à l'invariance de $\delta_{\mathbb{Z}} = \sum \delta(x-m)$ sous la transf. de Fourier

Si f est Gaussien:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi a n^2 + 2\pi i n b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{a} (n-b)^2}$$

On trouve donc

$$\begin{aligned} Z(R) &= \frac{1}{|\eta|^2} \sqrt{\frac{R^2}{\tau_2 \ell_s^2}} \sum_{\tilde{m}, n} \exp\left(-\frac{\pi R^2}{\ell_s^2} \frac{(\tilde{m} - n\tau_1)^2 + n^2 \tau_2^2}{\tau_2}\right) \\ &= \frac{R}{\ell_s \sqrt{\tau_2} |\eta|^2} \sum_{\tilde{m}, n} \exp\left(-\frac{\pi R^2}{\ell_s^2} \frac{|\tilde{m} - n\tau|^2}{\tau_2}\right) \end{aligned}$$

On peut interpréter ce résultat comme l'intégrale fonctionnelle sur la tore autour des solutions classiques

$$X_{cl} = 2\pi R (n \sigma_2 + \tilde{m} \sigma_1) + x$$

↑
métrique
 $\frac{1}{\tau_2} \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_1^2 \end{pmatrix}$

$$S_{Polyakov}(X_{cl}) = \frac{\pi R^2}{\tau_2 \ell_s^2} |\tilde{m} - n\tau|^2$$

les fluctuations

$$\delta X \sim e^{2\pi i (m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2)} \quad (m_1, m_2) \neq (0, 0)$$

et des valeurs propres $\lambda = \frac{4\pi^2}{\tau_2} |m_1 \tau - m_2|^2$

et $\det' \Delta = \prod \left(\frac{4\pi^2}{\tau_2} |m_1 \tau - m_2|^2 \right) = 4\pi^2 \tau_2 \eta^2(\tau) \bar{\eta}^2(\bar{\tau})$

soit $Z = \frac{2\pi R}{\ell_s} \sum_{m, n} \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 \tau_2 \eta^2 \bar{\eta}^2}} \exp\left(-\frac{\pi R^2}{\ell_s^2} |\tilde{m} - n\tau|^2\right) \quad \text{OK}$

l'invariance modulaire $\tau \rightarrow \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$

est maintenant manifeste : il suffit de changer $\begin{pmatrix} \tilde{m} \\ n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{m} \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{m}' \\ n' \end{pmatrix}$

dans la somme :

$$\frac{|\tilde{m}-n\tau|^2}{\tau_2} \rightarrow \frac{(c\tau+d)(c\bar{\tau}+d)}{\tau_2} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{m}' & -n' \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \\ \tilde{m}' & -n' \frac{a\bar{\tau}+b}{c\bar{\tau}+d} \end{pmatrix} = \frac{|\tilde{m}'(c\tau+d) - n'(a\tau+b)|^2}{\tau_2}$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}'d - n'b &= \tilde{m} \\ an' - c\tilde{m}' &= n \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \tilde{m} \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{m}' \\ n' \end{pmatrix}$$

* D'un autre côté la formulation hamiltonienne rend manifeste la symétrie

$$\begin{aligned} R &\rightarrow \frac{l_s^2}{R} & : & \text{T-dualité!} \\ m &\rightarrow n \\ h &\rightarrow m \end{aligned}$$

c'est une symétrie exacte de la théorie conforme

$$\begin{aligned} P_L &\rightarrow P_L & \partial X &\rightarrow \partial \tilde{X} \\ P_R &\rightarrow -P_R & \bar{\partial} X &\rightarrow -\bar{\partial} \tilde{X} \end{aligned}$$

ou plus généralement

$$\partial_\alpha X = \epsilon_{\alpha\beta} \partial^\beta \tilde{X} :$$

échange l'eq. du mvt $d^*(dX) = 0$
et l'id. de Bianchi $d(dX) = 0$.

* la limite $R \rightarrow \infty$ est aisée dans la form. ^{Lagrangienne} ~~Hamiltonienne~~
 $\tilde{m} = m = 0$ [secteur d'enroulement trivial]

et donc $Z(R \rightarrow \infty) \sim \frac{R}{l_s \sqrt{E_2} |\eta|^2}$

la limite $R \rightarrow 0$ est donc aussi une limite de grand volume :

$$Z(R \rightarrow 0) \sim \frac{l_s}{R \sqrt{E_2} |\eta|^2}$$

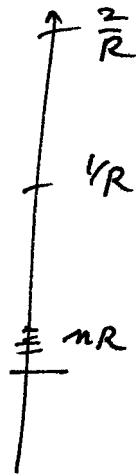
Speche de la corde bosonique :

$$R \gg l_s$$

(9)



$R \gg l_s$,
niveau de masse fixe



$R \ll l_s$

$$N_L - N_R - mn = 0$$

$$\alpha_{-1}^{\mu} \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu} |0\rangle \rightarrow g_{\mu\nu} \phi$$

$$\alpha_{-1}^I \tilde{\alpha}_{-1}^J |0\rangle \rightarrow G_{IJ} B_{IJ}$$

$$\alpha_{-1}^{\mu} \tilde{\alpha}_{-1}^I \rightarrow \omega_{\mu I}^I$$

$$\alpha_{-1}^I \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu} \rightarrow \tilde{\omega}_{\nu I}^I$$

$U(1) \times U(1)$
DOUBLEMENT

Ceci suggère l'existence d'une échelle de distance minimale, $R = l_s$, en théorie des cordes perturbatives [Rk: les effets non perturbatifs et D-branes permettent de tester des distances plus courtes].

Lorsque $R \rightarrow l_s$ rayon self dual, de nouveaux effets apparaissent:

$$\alpha_{-1}^{\mu} |m = \pm 1, n = \pm 1\rangle$$

$$\tilde{\alpha}_{-1}^{\mu} |m = \pm 1, n = \mp 1\rangle$$

satisfont à leur matching

et ont une masse $m^2 = \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{l_s^2}\right)^2 \rightarrow 0$ à $R = l_s$

la symétrie $U(1)_L \times U(1)_R$ est étendue en une symétrie de jauge $SU(2)_L \times SU(2)_R$

le rayon R peut être vu comme la vev d'un champ de Higgs

la T-dualité envoie $|m = +1, n = -1\rangle \rightarrow |m = -1, n = +1\rangle$

et donc peut être vu comme une transf de Weyl au point self dual.

⚠ rayon self dual \neq point fermionique $R = \frac{l_s}{\sqrt{2}}$

Ex Verifier que $Z(R = l_s/\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,b \\ \neq 0}} \left| \frac{\theta[a, b]}{\eta} \right|^2 = Z_{\text{fermion de Dirac}}$

Plus généralement, pour n bosons compacts ou un tore de métrique G_{IJ} , 2-form B_{IJ} :

Formulation laplacienne: $X_{cl}^I = \tilde{m}^I \sigma_1 + n^I \sigma_2$

$Z(G, B; z, \bar{z}) =$

$$\frac{V}{l_s^n \tau_2^{n/2} |\eta|^{2n}} \sum_{\tilde{m}^I, n^I} \exp \left[-\pi \frac{G_{IJ} (\tilde{m}^I - \tau n^I) (\tilde{m}^J - \bar{\tau} n^J)}{l_s^2 \tau_2} + 2\pi i \frac{B_{IJ} \tilde{m}^I n^J}{l_s^2} \right]$$

Resommation de Poisson sur $\tilde{m}^I \rightarrow m_I$ conduit à

$$Z = \frac{1}{|\eta|^{2n}} \sum_{m_I, n^I} \exp \left[-\pi \tau_2 \left[(m_{I5} + B_{IJ} \frac{n^J}{l_s})^2 + \left(\frac{n^I}{l_s} \right)^2 \right] + 2\pi i \tau_2 m_I n^I \right]$$

$$= \frac{1}{|\eta|^{2n}} \sum_{m_I, n^I} q^{\frac{1}{2} \vec{P}_L^2} \bar{q}^{\frac{1}{2} \vec{P}_R^2}$$

$\vec{P}_{tot} = m_I + \frac{B_{IJ} n^J}{l_s}$
dû au couplage minimal $\int B_{IJ} \partial_\tau X^I \partial_\sigma X^J$
qui affecte la charge de Noether par les translations

$$P_{L,I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(l_s m_I + \frac{B_{IJ} + G_{IJ} n^J}{l_s} \right)$$

$$P_{R,I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(l_s m_I + \frac{B_{IJ} - G_{IJ} n^J}{l_s} \right)$$

L'invariance modulaire n'est plus manifeste, mais l'invariance sous la T-dualité le devient :

$$E_{IJ} \equiv \frac{B_{IJ} + G_{IJ}}{l_s^2}$$

$$E \rightarrow (A E + B) (C E + D)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_{\Omega} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

$$\Omega^T L \Omega = L \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

afin de préserver $m_I n^I$

E_{IJ} paramétrise $SO(n, n, \mathbb{R})$
 $SO(n) \times SO(n)$

$$\sim \mathbb{R}^+ \times \frac{SO(n, \mathbb{R})}{SO(n, \mathbb{R})} \times \Lambda^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathbb{R}$$

Volume G_{IJ} B_{IJ}

Par exemple, pour $n=2$, $SO(2,2) \sim SO(2,1) \times SO(2,1) \sim SL(2) \times SL(2)$

on peut paramétriser

$$G_{IJ} = l_s^2 T_2 \cdot \frac{1}{U_2} \begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ u_1 & |u|^2 \end{pmatrix}$$

$$B_{IJ} = l_s^2 \begin{pmatrix} 0 & T_1 \\ -T_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$O(2,2, \mathbb{R})$ agit par transf. linéaires indépendantes de $T = T_1 + iT_2$ et $U = U_1 + iU_2$ ainsi que $T \leftrightarrow U$.
"Kähler modules" "complex modules"

Revenons à la fonction de partition

$$Z = \frac{P}{(\eta\bar{\eta})^n}, \quad \Gamma_{(G,B)} = \sum_{P_L, P_R \in \Gamma_{d,d}} q^{\frac{1}{2}P_L^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}P_R^2}$$

les vecteurs \vec{P}_L et \vec{P}_R sont les projections du vecteur $\in \mathbb{R}^n$ $\in \mathbb{R}^n$

$(m_I, n^I) \in \mathbb{Z}^{2n}$ sur deux sous espaces paramétrisés par G, B .

$$[ex G = 11 \frac{l_s^2}{l_s^2}, B=0, l_s=1 : \vec{P}_L = \vec{m} + \vec{n}, \vec{P}_R = \vec{m} - \vec{n}]$$

(m, n) sont à valeurs dans un réseau entier, équipée d'une forme quadratique $\|(m, n)\|^2 = 2m \cdot n = P_L^2 - P_R^2$ à valeurs paires, signature (n, n)

Qui plus est, ce réseau est auto-dual, ce qui est nécessaire pour l'invariance modulaire: ex $n=1$:

$$\sum_{m,n} e^{-\pi \tau_2 \left(\frac{m^2}{R^2} + n^2 R^2 \right) + 2\pi i m n \tau_1}$$

$$\xrightarrow{\text{Poisson sur } m,n} \frac{1}{|\tau|^n} \sum_{\tilde{m}, \tilde{n}} \exp \left(-\frac{\pi \tau_2}{|\tau|^2} \left(\tilde{m}^2 R^2 + \tilde{n}^2 / R^2 \right) + 2\pi i \frac{m \tilde{n} \tau_1}{|\tau|^2} \right)$$

L'existence de symétrie de jauge étendue est liée au cas où la projection P_L ou P_R de Γ contient le réseau des racines d'un groupe G ; ex $n=2, U=i \rightarrow SU(3)$

Exercices Théorie des Cordes "Compactification"

1. On considère la théorie conforme de 2 bosons compacts de même rayon. Cette théorie admet une symétrie sous l'échange des deux cercles. Construire la fonction de partition dans les différents secteurs, et vérifier l'invariance modulaire.

Rk: on pourra utiliser l'identité de "duplication" $\eta(2\tau) = \sqrt{\frac{\theta_2(\tau)\eta(\tau)}{2}}$

2. On compactifie la corde hétérotique $SO(32)$ sur un cercle de rayon R , en présence de lignes de Wilson $Y^\pm = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{8 \text{ fois}}; \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}}_{8 \text{ fois}})$.

Montrer que dans la limite $R \rightarrow 0$, on récupère la corde hétérotique $E_8 \times E_8$ en 10 dimensions.

Indication: la fonction de partition du réseau $\Gamma_{1,17}$ s'écrit

$$Z_{1,17} = \frac{R}{\sqrt{2} \eta \bar{\eta}^{17}} \sum_{m,n} \exp\left[-\frac{\pi R^2}{\tau_2} |m+n\tau|^2\right] \times \frac{1}{2} \sum_{a,b=0}^1 \prod_{I=1}^{16} e^{i\pi m n Y^I Y^I - i\pi b n Y^I} \begin{matrix} a - 2n Y^I \\ b - 2m Y^I \end{matrix}$$

On reconnaît l'orbifold de la corde hétérotique sous la translation d'une demi-période le long du cercle, fait une certaine action sur les 16 bosons chiraux.

3. Décrire la cohomologie des orbifolds T^4/\mathbb{Z}_3 , T^4/\mathbb{Z}_4 , T^4/\mathbb{Z}_6 , définis par le quotient $(z_1, z_2) \sim (e^{i\theta} z_1, e^{-i\theta} z_2)$ $\theta = 2\pi/3, \pi/2, \pi/3$

où z_1, z_2 décrivent le produit $T^2 \times T^2$ avec

$$z_i \sim z_i + m + i n \quad (\theta = \pi/2) \quad \text{ou} \quad z_i \sim z_i + m + e^{i\pi/3} n \quad (\theta = \pi/3 \text{ ou } \frac{2\pi}{3})$$

après résolution des singularités.

(On rappelle qu'après résolution par un espace d'Éguchi-Hanson, une singularité $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_k$ donne lieu à $k-1$ deux-cycles anti-self duaux).