Quantification des cordes bosoniques

Plusieurs méthodes :

- quantification dans la jauge du cône de lumière
  manifestement unitaire, spectre aisé à déterminer
  interactions difficiles car invariance de Lorentz non manifeste
- Quantification canonique "à l'ancienne"
  invariance de Lorentz manifeste
  mais espace de Hilbert non défini positif
  contraintes imposées à la "Gupta-Bleuler"
  efficace pour les calculs jusqu'à 1 boucle

  } on n'en parlera pas
- Quantification par intégrale fonctionnelle
  La plus puissante, en combinaison avec les techniques
  de théorie conforme et la symétrie BRST
  Valable en principe dans des espaces courbes

1. Quantification dans la jauge du cône de lumière

On a vu que la jauge conforme $ds^2 = -d\xi^+ d\xi^- = -d\tau^2 + d\sigma^2$
laissait la possibilité de changement de coordonnées

$$\xi^{+\prime} = f(\xi^+) \quad , \quad \xi^{-\prime} = g(\xi^-)$$

soit

$$2\tau' = f(\tau+\sigma) + g(\tau-\sigma)$$
$$2\sigma' = f(\tau+\sigma) - g(\tau-\sigma)$$

En particulier, $\partial_+\partial_-\tau' = 0$

On peut en fait identifier τ' à toute solution de $\partial_+\partial_- = 0$
la coordonnée σ' est alors déterminée à une translation près.

Puisque $\partial_+\partial_- X^+ = 0$ $\qquad X^\pm = X^0 \pm X^1$

on peut choisir $\quad X^+ = x^+ + \ell_s^2 p^+ \tau$

c'est-à-dire éliminer les oscillateurs α_n^+, $\bar{\alpha}_n^+$

les contraintes de Virasoro

$$T_{\pm\pm} = \frac{1}{2}\partial_\pm X^\mu \partial_\pm X_\mu = \frac{1}{2}\left(-\partial_\pm X^+ \partial_\pm X^- + \partial_\pm X^i \partial_\pm X^i\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\ell_s^2 p^+ \partial_\pm X^- + \frac{1}{2}\partial_\pm X^i \partial_\pm X^i \equiv 0$$

permettent d'éliminer les oscillateurs α_n^-, $\bar{\alpha}_n^-$:

Multiplions par $2T e^{im(\tau\pm\sigma)}$ et intégrons :

$$L_m^\perp = \frac{T\ell_s^2 p^+}{2}\int_0^{2\pi} \partial_- X^- e^{im(\tau-\sigma)} d\sigma$$
$$= \frac{1}{\cancel{2\pi\ell_s^2}} \cdot \frac{\cancel{\ell_s^2} p^+}{2} \cdot \cancel{2\pi} \cdot \frac{\ell_s}{\sqrt{2}}\alpha_m^- = \frac{\ell_s p^+}{2\sqrt{2}}\alpha_m^-$$

soit

$$\alpha_m^- = \frac{2\sqrt{2}}{\ell_s p^+}\left[\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha^i_{m-k}\alpha^i_k\right]$$

De la même manière,

$$\bar{\alpha}_m^- = \frac{2\sqrt{2}}{\ell_s p^+}\left[\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \bar{\alpha}^i_{m-k}\bar{\alpha}^i_k\right]$$

* Ces expressions sont valables classiquement. Au niveau quantique,

$$\{\ ,\ \}_{PB} \to -i[\ ,\ ]$$

soit

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}$$
$$[\alpha^i_m, \alpha^j_n] = [\bar{\alpha}^i_m, \bar{\alpha}^j_n] = m\,\delta_{m+n}\,\delta^{ij}$$

le calcul précédent donne en fait l'ordre symétrique,

$$\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha^i_{m-k}\alpha^i_k \to \frac{1}{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\alpha^i_{m-k}\alpha^i_k + \alpha^i_k\alpha^i_{m-k}\right)$$

En adoptant l'ordre normal, on a donc

$$\alpha^-_m = \frac{2\sqrt{2}}{\ell_s p^+}\left[\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} :\alpha^i_{m-k}\,\alpha^i_k: + \frac{D-2}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\right).\,\delta_{m,0}\right]$$

La régularisation par fonction ζ donne $\sum_{k=1}^{\infty} k = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$

En particulier, pour $m=0$ on obtient la condition de couche de masse:

$$\frac{\ell_s}{\sqrt{2}}\,p^- = \frac{2\sqrt{2}}{\ell_s p^+}\left[\frac{\ell_s^2}{4}(p^i)^2 - \frac{D-2}{24} + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha^i_{-k}\,\alpha^i_k\right]$$

Soit, en multipliant par $\sqrt{2}\,\ell_s p^+$,

$$\ell_s^2\left(p^+p^- - p_i^2\right) = 4\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^i_{-k}\,\alpha^i_k - \frac{D-2}{24}\right)$$

On obtient donc

$$\ell_s^2\, m^2 = 4\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^i_{-k}\,\alpha^i_k - \frac{D-2}{24}\right)$$

De même, on obtient du côté des left-movers

$$\ell_s^2\, m^2 = 4\left(\sum_{k=1}^{\infty}\bar\alpha^i_{-k}\,\bar\alpha^i_k - \frac{D-2}{24}\right)$$

Définissons $N^\perp = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha^i_{-k}\,\alpha^i_k$, $\bar N^\perp = \sum_{k=1}^{\infty}\bar\alpha^i_{-k}\,\alpha^i_k$ le niveau total d'excitations transverses droites et gauches

Le spectre est donc donné par

$$\boxed{\ell_s^2\, m^2 = 4(N^\perp - a)}$$

sous la condition de "level matching" $\boxed{N^\perp = \bar N^\perp}$

$\boxed{a = \frac{D-2}{24}}$ est appelé l'"intercept" : c'est l'énergie Casimir des D-2 bosons transverses sur le cylindre.

* La procédure ci-dessus n'est pas manifestement invariante de Lorentz. Il faut donc contrôler que le spectre des états massifs s'organise en multiplets du groupe d'isotropie $SO(D-1)$.

L'état fondamental $|p\rangle$ a une masse $\ell_s^2 m^2 = -4a$.
Le premier état excité $\alpha^i_{-1}\,\bar\alpha^j_{-1}|p\rangle$ se décompose en trois représentations de $SO(D-2)$, de masse $\ell_s^2 m^2 = 4(1-a)$

$$\alpha^{[i}_{-1}\,\bar\alpha^{j]}_{-1}|p\rangle \oplus \left(\alpha^{(i}_{-1}\,\bar\alpha^{j)}_{-1} - \frac{\delta^{ij}}{D-2}\,\alpha^k_{-1}\,\bar\alpha^k_{-1}\right)|p\rangle$$

$$\oplus\ \frac{1}{D-2}\,\delta^{ij}\,\alpha^k_{-1}\,\bar\alpha^k_{-1}\,|p\rangle$$

Ces trois reps ne peuvent être combinées en une rep de $SO(D-1)$: il est donc nécessaire que $m^2=0$ soit $\boxed{a=1}$

On voit donc que la corde bosonique n'est cohérente avec l'invariance de Lorentz qu'en dimension 26 !!

L'état fondamental a donc $\ell_s^2 m^2 = -4 < 0$: cela signale une instabilité.

Le premier niveau excité décrit 3 particules de masse nulle :

$B_{ij} = -B_{ij}$: tenseur antisymétrique de Kalb Ramond

$h_{ij} = h_{ji}$, $h_i^{\ i} = 0$: LE GRAVITON !

ϕ : champ scalaire appelé DILATON

On verra plus loin que la théorie effective décrivant ces modes est du type

$$S_{eff} = \int d^{26}x\,\sqrt{g}\left[(\partial_\mu T)^2 + 4T^2 + (\partial\phi)^2 + R + \underset{+\text{ etc.}}{(\partial_\mu B_{\nu\rho})^2}\right]e^{-2\phi}$$

* De fait, on vérifie que l'algèbre de Poincaré n'est réalisée que si $a=1$ et $D=26$

Idée : Sous une transformation de Lorentz,

$$\delta X^\mu(\sigma,\tau) = \omega^\mu{}_\nu X^\nu(\sigma,\tau) + \xi^\alpha(\tau,\sigma)\,\partial_\alpha X^\mu(\tau,\sigma)$$

où ξ^α est un difféomorphisme infinitésimal qui "ramène" à la condition de jauge $X^+ = x^+ + p^+\tau$.
On introduit aussi une transformation de Weyl Λ de manière à préserver la jauge conforme, $\partial^\alpha\xi^\beta + \partial^\beta\xi^\alpha = 2\Lambda\,\eta^{\alpha\beta}$.

La composante $\mu=+$ ci-dessus donne

$$\omega^+{}_\nu(x^\nu + p^\nu\tau) = \omega^+{}_\nu X^\nu(\sigma,\tau) + \ell_s^2 p^+ \xi^0$$

Soit $$\xi^0 = \frac{\omega^+_\nu}{\ell_s p^+}\left(x^\nu + p^\nu\tau - X^\nu(\sigma,\tau)\right)$$

$$\xi^1 = \int_0^\sigma d\sigma' \frac{\partial\xi^0}{\partial\tau}$$

La variation $\delta X^\mu(\sigma,\tau)$ contient donc des termes quadratiques en X^i, sources potentielles de divergences.

La suite dans Green - Schwarz - Witten vol 1 section 2.3.

* Cordes fermées non orientées :

Les cordes fermées que nous avons considérées jusqu'à présent étaient orientées : les modes "left moving" et "right-moving" étaient distinguables.

La symétrie $\sigma \to 2\pi - \sigma$, $\tau \to \tau$ échange ces modes.
Elle est représentée par un opérateur unitaire Ω dans l'espace de Fock, tel que

$$\Omega\,\alpha_k^\mu\,\Omega^{-1} = \bar\alpha_k^\mu \qquad \Omega^2 = 1$$
$$\Omega\,\bar\alpha_k\,\Omega^{-1} = \alpha_k^\mu$$

On peut montrer que le tachyon $|p^\mu\rangle$ doit être invariant :

$$\Omega\,|p^\mu\rangle = |p^\mu\rangle$$

La corde fermée non-orientée est définie en ne gardant que les états invariants sous Ω, $\Omega|\text{phys}\rangle = |\text{phys}\rangle$.

On voit que le premier niveau excité ne contient plus que le graviton et le dilaton ; le champ de Kalb-Ramond est éliminé.

* Cas des cordes ouvertes

On considère ici des conditions "NN" (Neumann aux 2 bouts)
Les mêmes considérations que plus haut avec $p^\mu \to 2p^\mu$ montrent que le spectre de la corde ouverte est donné par

$$\ell_s^2 m^2 = (N^\perp - a) \qquad \begin{cases} N^\perp = \sum_{k=1}^\infty \alpha^i_{-k}\alpha^i_k \\ a = \frac{D-2}{24}\end{cases}$$

Ici encore, la consistance impose $a=1$, $D=26$.

le niveau fondamental est toujours tachyonique, de masse $\ell_s^2 m^2 = -1$ (2 fois moins que celui de la corde fermée!)

le premier niveau excité $\alpha^i_{-1}|p\rangle$ est un boson transverse de masse nulle ; la théorie effective n'est autre que Maxwell :

$$S_{\text{eff}}^{\text{ouv.}} = \int d^{26}x \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dilaton} \\ \text{de corde fermé}}}{e^{-\varphi}} \left[(\partial t)^2 + t^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \right]$$

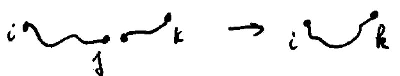
⚠ Deux cordes ouvertes peuvent toujours se combiner en une corde fermée

Remarques :

* Il est possible d'attacher un indice de "couleur", à chaque extrémité de la corde ouverte, $i, j = 1..N$: <u>indices de Chan-Paton</u>

On obtient ainsi N^2 copies du spectre ci-dessus :
$$|p^\mu; i, j\rangle$$

Si on demande que les seules interactions possibles sont du type



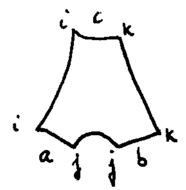
, on voit que les interactions seront invariantes sous une symétrie de jauge $U(N)$:

Pour cela, changeons de base : $|p^\mu; a\rangle = \sum_{i,j} \lambda^a_{ij} |p^\mu; i, j\rangle$

où λ^a_{ij}, $a = 1..N^2$ sont les générateurs de l'algèbre de Lie de $U(N)$:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = f^{ab}{}_c \lambda^c \qquad \lambda^+ = \lambda$$

les amplitudes sont ainsi proportionnelles à des traces de produits de λ.



$\mathrm{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c)$

invariantes sous $\lambda \to U \lambda U^{-1}$, $U^+ U = 1$

On verra que la théorie effective est alors une théorie de Yang-Mills, analogue à celle qui décrit les interactions fortes !

* Comme pour les cordes fermées, il est possible de définir une version <u>non-orientée</u> des cordes ouvertes :

Pour les cordes NN, l'action de Ω : $\begin{matrix}\sigma \to \pi - \sigma \\ \tau \to \tau\end{matrix}$

dans l'espace de Fock est

$$\Omega \, \alpha^\mu_k \, \Omega^{-1} = (-1)^k \, \alpha^\mu_k$$

En l'absence de facteurs de Chan-Paton, le premier niveau excité est donc éliminé : plus de boson de jauge !

Mais si $N > 1$, il y a de nouvelles possibilités :

Supposons
$$\Omega \, |p; ij\rangle = \varepsilon \, (\gamma_\Omega)_{ii'} \, |p; j'i'\rangle \, (\gamma_\Omega^{-1})_{j'j}$$

où γ_Ω est une matrice unitaire $N \times N$ $\qquad$ Ω échange les 2 bouts!

la condition $\Omega^2 = 1$ impose

$$\gamma_\Omega = \xi \, \gamma_\Omega^t \; , \qquad \varepsilon^2 \xi^2 = 1$$

Comme $\det(\gamma_\Omega) = \det(\gamma_\Omega^t)$, $\xi^N = 1$.

les états du 1er niveau $\quad A^{i,a} = \sum \lambda^a_{ij} \, \alpha^i_{-1} |p; i, j\rangle$

sont invariants ssi $\quad \lambda = -\varepsilon \, \gamma_\Omega \lambda^T \gamma_\Omega^{-1} \quad (*)$

On en déduit $\quad \varepsilon^2 = 1, \; \xi^2 = 1$.

Enfin, il est nécessaire que si λ_1, λ_2 vérifient $(*)$, $[\lambda_1, \lambda_2]$ aussi

Cela fixe $\varepsilon = 1$. Il reste donc 2 possibilités :

$\xi = 1$: γ_Ω est diagonalisable $\leadsto$ $\gamma_\Omega = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_N}\end{pmatrix}$

$\lambda_{ii} = 0, \; \lambda_{ij} = i R_{ij} \, e^{\frac{i}{2}(\theta_i - \theta_j)}$

On trouve que l'on peut toujours se ramener à $\gamma_\Omega = 1$, et donc $\boxed{G = SO(N)}$

$\xi = -1$: $\gamma_\Omega = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ e^{-i\theta_1} & 0 \\ & & \ddots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boxed{G = Sp(N)}$

2 Quantification par intégrale de chemin.

2.1. Rappel sur la particule ponctuelle :

On considère l'intégrale fonctionnelle

$$\int De(\tau)\, DX^\mu(\tau) \quad \exp\left[\frac{i}{2} \int d\tau \left(\frac{(\dot{X}^\mu)^2}{e} - m^2 e \right)\right]$$

* Pour donner un sens à cette intégrale, il est nécessaire de faire une "rotation de Wick", c'est-à-dire déformer le contour d'intégration :

$$e(\tau) \to e^{-i\theta}\, e(\tau)$$
$$X^0(\tau) \to e^{-i\theta}\, X^0(\tau)$$
$$iS \to \frac{i}{2}\int d\tau \quad \frac{1}{e}\left(-e^{-i\theta}(\dot{X}^0)^2 + e^{i\theta}(\dot{X}^i)^2 \right) - m^2 e^{-i\theta} \Big)$$

la partie réelle de l'exposant, $-\sin\theta \left[\frac{(\dot{X}^0)^2 + (\dot{X}^i)^2}{e} + m^2 e \right]$ est positive pour $0 < \theta < \pi$, ce qui rend l'intégrale convergente. En particulier, pour $\theta = \pi/2$, on obtient

$$\int De(\tau)\, DX^\mu(\tau) \quad \exp\left[-\int d\tau \left(\frac{1}{e} (\dot{X}^\mu)^2 + m^2 e \right)\right]$$

où la métrique d'espace-cible, $ds^2 = (dX^0)^2 + (dX^i)^2$ est maintenant définie positive.

* Cette intégrale reste malgré tout infinie, en raison de l'invariance de l'action sous les difféomorphismes,

$$\delta X^\mu = \xi(\tau) \quad \dot{X}^\mu(\tau)$$
$$\delta e = \frac{d}{d\tau}\left(\xi(\tau)\, e(\tau) \right)$$

On divise donc formellement l'intégrale par le volume du groupe de jauge (infini) :

$$\int \frac{De(\tau)\, DX^\mu(\tau)}{V_{diff}} \exp\left[-\int d\tau \left(\frac{(\dot{X}^\mu)^2}{e} + m^2 e \right)\right]$$

Cela est suffisant pour garantir $\langle phys' | L_n | phys \rangle = 0 \; \forall n \in \mathbb{Z}$ grâce à l'hermiticité de L_n.

Du coup, les états $|\chi\rangle = \sum_{n>0} L_{-n} |\chi_n\rangle$ sont orthogonaux à tous les états physiques : on les appelle "états spurieux". Comme tous les L_{-n} s'obtiennent par commutateurs de L_{-1} et L_{-2} on peut se restreindre à $|\chi\rangle = L_{-1}|\chi_1\rangle + L_{-2}|\chi_2\rangle$

Il se peut qu'un état soit à la fois physique et spurieux : il est alors de norme nulle, et découple des amplitudes physiques : l'existence de tels états signale une symétrie de jauge dans l'espace-cible. Ces symétries sont nombreuses lorsque $a=1$, $D=26$!

Par exemple, le premier niveau excité de la corde bosonique ouverte est

$$|\psi\rangle = \xi^\mu \alpha^\mu_{-1} \, | p^\mu \rangle$$

la condition $(L_0 - a)|\psi\rangle = 0$ donne $\xi m^2 = 1 - a$.

la condition $L_1 |\psi\rangle = 0$ donne $p^\mu \xi_\mu = 0$

L'état spurieux $|\chi\rangle = L_{-1}|p^\mu\rangle$ est physique si

$$(L_0 - a)\, L_{-1}|p\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad (L_0 - a + 1)|p\rangle = 0$$
$$L_1 L_{-1} |p\rangle = [L_1, L_{-1}]\, |p\rangle = 2 L_0 |p\rangle$$

soit si $a = 1$. On reconnaît l'invariance de jauge de QED :

$$\xi^\mu \sim \xi^\mu + k^\mu .$$

On montre (et on admettra) que pour $D = 26$, $a = 1$, l'espace "de Hilbert" obtenu en imposant les contraintes $L_{m>0}|phys\rangle = 0$, $(L_0 - a)|phys\rangle = 0$ et en quotientant les états de norme nulle est défini positif ("no ghost theorem")

Par un difféomorphisme bien choisi, on peut toujours ramener $e(\tau)$ à un $\hat{e}(\tau)$ arbitraire (en tout cas localement ; globalement, $L = \int e(\tau)\,d\tau$ doit être preservé).

Pour déterminer la mesure d'intégration résiduelle, on utilise

$$1 = \int_{\text{Diff}} D\xi \;\; \delta\big(e(\tau) - \hat{e}^{\xi}(\tau)\big) \;\; J(e(\tau))$$

où $\hat{e}^{\xi}(\tau)$ est l'image de la tétrade de référence $\hat{e}(\tau)$ par le difféomorphisme ξ ; $J(e(\tau))$ est le Jacobien de la transformation $\xi \mapsto \hat{e}^{\xi}(\tau)$,

En insérant dans l'intégrale fonctionnelle, on trouve

$$\int \frac{De(\tau)\, DX^{\mu}(\tau)\, D\xi(\tau)}{V\text{diff}} \;\; J(e(\tau)) \;\; \delta\big(e(\tau) - \hat{e}^{\xi}(\tau)\big) \;\; \exp\left[-S(X^{\mu}, e)\right]$$

On peut maintenant intégrer sur $e(\tau)$:

$$\int \frac{DX^{\mu}(\tau)\; D\xi(\tau)}{V\text{diff}} \;\; J(\hat{e}^{\xi}) \;\; \exp\left[-S(X^{\mu}, \hat{e}^{\xi})\right]$$

Maintenant, on utilise l'invariance de DX^{μ}, $S(X,e)$ et $J(e)$ sous les difféomorphismes, pour écrire

$$\int DX^{\mu} \cdot \underbrace{\frac{\int D\xi}{V\text{diff}}}_{=\,1} \cdot \;\; J(\hat{e}) \;\; \exp\left[-S(X^{\mu}, \hat{e})\right]$$

Finalement, $J(\hat{e}) = \;\; \text{Jacobien}\left(\xi \mapsto \hat{e} + \frac{d}{d\tau}\big(\xi(\tau)\hat{e}(\tau)\big)\right)$ peut se récrire comme une intégrale sur des variables fermioniques,

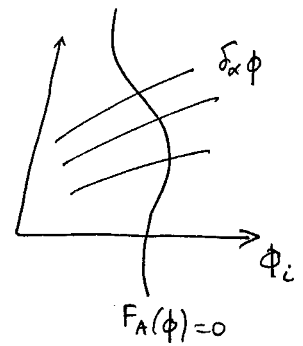
$$\int DX^{\mu} \;\; \exp\left[-\int d\tau \left\{ \frac{(\dot{X}^{\mu})^2}{\hat{e}} + m^2 \hat{e} - \hat{e}\, \frac{db(\tau)}{d\tau}\, c(\tau) \right\}\right]$$

2.2 : BRST

$\star$ Cette procédure est tout à fait générale :

Considérons $S_0(\phi_i)$ invariante sous une symétrie

$$\delta\phi_i = \xi^{\alpha} \delta_{\alpha}\phi_i \quad , \quad [\delta_{\alpha}, \delta_{\beta}] = f^{\gamma}_{\ \alpha\beta}\, \delta_{\gamma}$$



On choisit une sous-variété

$$F^A(\phi) = 0$$

qui intersecte transversalement chaque orbite du groupe de jauge 1 et 1 seule fois.

Alors on peut écrire

$$\int \frac{d\phi^i}{V_{sym}} \exp\left(-S_0(\phi)\right) = \frac{\int d\phi^i \int_G d\xi}{V_{sym}} \;\; \delta\left(F^A(\phi^{\xi})\right) J\left(\xi \to F^A(\phi^{\xi})\right) e^{-S_0(\phi)}$$

$$= \left(\frac{\int_G d\xi}{V_{sym}}\right) \int d\phi^i \;\; \delta\left(F^A(\phi^{\xi})\right) J\left(\xi \to F^A(\phi^{\xi})\right) e^{-S_0(\phi)}$$

$$= \int d\phi^i \int dB_A \int db_A \int dc^{\alpha} \;\; \exp\left[-S_0 - S_1 - S_2\right]$$

avec

$$S_1(\phi) = -i\, B_A F^A(\phi)$$

$$S_2(\phi) = b_A\, c^{\alpha} \delta_{\alpha} F^A(\phi)$$

où B_A est un champ commutant : "antifantôme"

b_A, c^{α} sont des champs anti-commutants : "fantôme"

* Remarquablement, cette action admet une symétrie appelée transformation de Becchi – Rouet – Stora – Tyutin,

$$\delta_B \phi_i = -i\varepsilon\, c^\alpha \delta_\alpha \phi_i$$
$$\delta_B B_A = 0$$
$$\delta_B b_A = \varepsilon B_A$$
$$\delta_B c_\alpha = \frac{i}{2}\varepsilon f^\alpha{}_{\beta\gamma} c^\beta c^\gamma$$

où ε est un paramètre anticommutant : en effet

$$\delta_B S_0 = 0$$
$$\delta_B S_1 = -i B_A \cdot -i\varepsilon\, c^\alpha \delta_\alpha F^A$$
$$\delta_B S_2 = \varepsilon B_A c^\alpha \delta_\alpha F^A + \frac{i}{2} b_A \varepsilon f^\alpha_{\beta\gamma} c^\beta c^\gamma \delta_\alpha F^A + b_A c^\alpha \delta_\beta \delta_\alpha F^A . (-i\varepsilon) c^\beta$$

Par ailleurs, on vérifie que

$$\delta_B (b_A F^A) = i\varepsilon (S_1 + S_2)$$

Par quantification, la symétrie δ_B est représentée par un opérateur hermitien Q_B, agissant par (anti)commutateur sur les quantités (fermioniques / bosoniques)

$$\delta_B f = \{Q_B, f\}_\varepsilon = Q_B f + \varepsilon f Q_B \quad , \quad \varepsilon = \pm 1$$

Sous une variation δF^A des conditions de fixage de jauge, on voit que

$$-i\varepsilon\, \delta\langle f|i\rangle = \langle f|\, i\varepsilon (S_1+S_2)\, |i\rangle = \langle f|\, \{Q_B, b_A F^A\}\, |i\rangle$$

donc $\langle f|i\rangle$ sera invariant si $Q_B|i\rangle = 0$: $Q_B|f\rangle = 0$

Un état $|\phi\rangle$ tel que $Q_B|\phi\rangle = 0$ est dit physique, ou "BRST fermé"

Enfin, on vérifie que Q_B est nilpotent : $Q_B^2 = 0$

Cela implique en particulier qu'il continue à commuter avec le Hamiltonien lorsqu'on change la condition de fixage de jauge :

$$[Q_B, \{Q_B, b_A \delta F^A\}] = [Q_B^2, b_A \delta F^A] = 0$$

De plus, les états $|\phi\rangle = Q_B|\chi\rangle$ pour tout $|\chi\rangle$ sont automatiquement physiques, et orthogonaux à tous les états physiques (y compris eux-même) : on les appelle états nuls, spurieux ou "BRST – exact".

Deux états physiques qui diffèrent par un état nul ont les mêmes produits avec tous les autres états physiques.

On définit donc l'espace des états physiques comme le quotient

$$H_{phys} = H_{\text{fermé}} / H_{\text{exact}} .$$

23 * Revenons au cas de la particule ponctuelle, dans la jauge $\hat{e} = 1$:

$$S = \int d\tau \ \frac{1}{2}(\mathring{X}^\mu)^2 + \frac{1}{2}m^2 - \mathring{b}c$$

est invariant sous

$$\delta_B X^\mu = i\varepsilon c\, \mathring{X}^\mu$$
$$\delta_B b = i\varepsilon \left(-\frac{1}{2}(\mathring{X}^\mu)^2 + \frac{1}{2}m^2 - \mathring{b}c\right)$$
$$\delta_B c = i\varepsilon c\mathring{c}$$

et $\delta_B^2 = 0$ on-shell.

$$[p^\mu, X^\nu] = -i\eta \qquad \{b, c\} = 1$$

le Hamiltonien est toujours $H = \frac{1}{2}(p^2 + m^2)$

avec $p^\mu = i\mathring{X}^\mu$! ⚠ signature euclidienne !

De plus $Q_B = cH = \frac{c}{2}(p^2 + m^2)$

Le spectre est donc un système à 2 états $|k,\uparrow\rangle$, $|k,\downarrow\rangle$:

$$0 \xleftarrow{c} |k,\uparrow\rangle \underset{c}{\overset{b}{\rightleftarrows}} |k,\downarrow\rangle \xrightarrow{b} 0$$

Les états BRST-fermés sont $|k,\uparrow\rangle$ pour k arbitraire
$|k,\downarrow\rangle$ pour $k^2+m^2=0$

Les états BRST-exacts sont $|k,\uparrow\rangle$ pour $k^2+m^2\neq 0$

Les états fermés mais non exacts sont donc $|k,\uparrow\rangle$ et $|k,\downarrow\rangle$ avec $k^2+m^2=0$ dans les deux cas.

On trouve donc un doublement du spectre du boson libre.
En fait, seuls les états $|k,\downarrow\rangle$ apparaissent dans les amplitudes physiques : les états $|k,\uparrow\rangle$ étant exacts si $k^2+m^2=0$, leurs amplitudes devraient être proportionnelles à $\delta(k^2+m^2)$, ce qui est incompatible avec la structure analytique de la matrice S en théorie des champs.

On conclut que les états physiques sont les états BRST-fermés, modulo les états BRST-exacts, qui satisfont en plus à la condition de Siegel

$$b|\psi\rangle = 0$$

2.4. La corde bosonique fermée

Comme pour la particule ponctuelle, on fait une rotation de Wick à la fois sur la surface d'univers, et dans l'espace-cible.

On divise aussi par le volume du groupe de jauge, Diff ⋉ Weyl :

$$Z = \int \frac{DX^\mu(\sigma,\tau)\, Dg_{\alpha\beta}(\sigma,\tau)}{V_{\mathrm{diff}\ltimes\mathrm{Weyl}}} \exp\left[-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_M d^2\sigma \sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu\right]$$

On a vu que localement, l'invariance sous Diff ⋉ Weyl permettait de se ramener à une métrique $\hat{g}_{\alpha\beta}$ arbitraire, par exemple plate,

$$\hat{g}_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta = d\tau^2 + d\sigma^2 = dz\, d\bar{z}, \qquad z = \tau + i\sigma,\ \bar{z} = \tau - i\sigma$$

Insérons l'identité $1 = J(g) \int_{\mathrm{Diff}\ltimes\mathrm{Weyl}} D\xi\, \delta[g - \hat{g}^\xi]$
où $\hat{g}^\xi$ est l'image de g par la transformation de jauge ξ.
Par les mêmes transformations que plus haut, et en supposant que la mesure $DX^\mu Dg_{\alpha\beta}$ est bien invariante sous Diff ⋉ Weyl, on conclut que

$$Z = \int DX^\mu(\sigma,\tau)\, J(\hat{g}) \exp\left[-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_M d^2\sigma \sqrt{\hat{g}}\, \hat{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha X \partial_\beta X_\mu\right]$$

Le Jacobien $J(\hat{g})$ peut-être réécrit comme une contribution de fantômes de Fadeev-Popov de la manière suivante :

Au voisinage de l'identité,

$$\delta_\xi g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha + 2\Lambda g_{\alpha\beta}$$
$$= (P.\xi)_{\alpha\beta} + 2\left(\Lambda + \tfrac{1}{2}\nabla_\gamma \xi^\gamma\right) g_{\alpha\beta}$$

où $(P.\xi)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha - (\nabla_\gamma \xi^\gamma)\, g_{\alpha\beta}$
est un opérateur qui transforme le vecteur ξ^α en un tenseur sym sans trace.

On peut donc écrire, au voisinage de l'identité,

$$J(\hat{g})^{-1} = \int_{\text{Diff} \times \text{Weyl}} D\xi \quad \delta[g - \hat{g}^{\xi}]$$

$$= \int D\xi^{\alpha} D\Lambda \quad \delta\left[(\hat{P}.\xi)_{\alpha\beta} + 2(\Lambda + \tfrac{1}{2}\hat{\nabla}_{\gamma}\xi^{\gamma})\, \hat{g}_{\alpha\beta} \right]$$

$$= \int D\xi^{\alpha} D\Lambda\, D\beta^{\alpha\beta} \exp\left[2\pi i \int d^2\sigma\sqrt{\hat{g}}\, \beta^{\alpha\beta} \left((\hat{P}.\xi)_{\alpha\beta} + 2(\Lambda + \tfrac{1}{2}\hat{\nabla}_{\gamma}\xi^{\gamma})\hat{g}_{\alpha\beta} \right) \right]$$

L'intégrale sur $D\Lambda$ impose $\beta^{\alpha\beta}\hat{g}_{\alpha\beta} = 0$: il reste donc

$$J(\hat{g})^{-1} = \int D\xi^{\alpha}\, D\beta'_{\alpha\beta} \quad \exp\left[2\pi i \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \quad \beta'_{\alpha\beta} \left(\hat{P}.\xi\right)^{\alpha\beta} \right]$$

où $\beta'_{\alpha\beta}$ est de trace nulle.

On obtient $J(\hat{g})$ en changeant la statistique, ie en remplaçant

$$\xi^{\alpha} \to c^{\alpha}$$
$$\beta'_{\alpha\beta} \to b_{\alpha\beta}$$

où $c^{\alpha}, b_{\alpha\beta}$ sont des variables anticommutantes, $b_{\alpha\beta}\hat{g}^{\alpha\beta} = 0$

Après fixation de jauge, l'intégrale fonctionnelle pour la corde bosonique s'écrit donc

$$Z = \int DX^{\mu}(\sigma,\tau)\; Dc^{\alpha}\; Db_{\alpha\beta}$$
$$\exp\left[-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \quad \hat{g}^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}X^{\mu}\partial_{\beta}X_{\mu} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4\pi}\int_M d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \left(b_{\alpha\beta}\nabla^{\alpha}c^{\beta} + b_{\alpha\beta}\nabla^{\beta}c^{\alpha} \right) \right]$$

On peut si on le souhaite revenir en signature minkovskienne ; dans la jauge conforme, on obtient l'action

$$S = 2T\int d^2\xi \;\; \partial_+ X^{\mu}\partial_- X_{\mu} \;\; + \;\; \frac{1}{\pi}\int \left(b_{++}\partial_- c^+ + b_{--}\partial_+ c^- \right)$$

On vérifie que l'action est invariante sous la symétrie BRST

$$\delta_B X^{\mu} = i\varepsilon \left(c^+\partial_+ + c^-\partial_- \right) X^{\mu}$$
$$\delta_B c^{\pm} = \pm i\varepsilon \left(c^+\partial_+ + c^-\partial_- \right) c^{\pm}$$
$$\delta_B b_{\pm\pm} = \pm i\varepsilon \left(T^X_{\pm\pm} + T^{gh}_{\pm\pm} \right)$$

où $T^{gh}_{\pm\pm}$ est la contribution des fantômes (ghosts) au tenseur d'energie impulsion :

$$T^{gh}_{++} = i\left(2b_{++}\partial_+ c^+ + \partial_+ b_{++} c^+ \right)$$
$$T^{gh}_{--} = i\left(2b_{--}\partial_- c^- + \partial_- b_{--} c^- \right)$$

Ce tenseur est conservé classiquement, ie $\partial_- T^{gh}_{++} = \partial_+ T^{gh}_{--} = 0$ puisque les eqs du mouvement donnent

$$\partial_- b_{++} = \partial_- c^+ = \partial_+ b_{--} = \partial_+ c^- = 0$$

La quantification canonique procède comme d'habitude :

$$c^+ = \sum \bar{c}_n e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad c^- = \sum c_n e^{-in(\tau-\sigma)}$$
$$b_{++} = \sum \bar{b}_n e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad b_{--} = \sum b_n e^{-in(\tau-\sigma)}$$

$$\{b_m, c_n\} = \delta_{m+n} \qquad \{b,b\} = \{c,c\} = 0$$

Les générateurs de Virasoro s'écrivent

$$L^{gh}_m = \sum_n (m-n) :b_{m+n}c_{-n}:$$
$$\bar{L}^{gh}_m = \sum_n (m-n) :\bar{b}_{m+n}\bar{c}_{-n}:$$

On vérifie par les mêmes méthodes que précédemment l'algèbre de Virasoro

$$[L^{gh}_m, L^{gh}_n] = (m-n)\, L^{gh}_{m+n} + \frac{1}{6}(m - 13m^3)\,\delta_{m+n}$$

La charge centrale associée aux fantômes (b,c) est donc $c = -26$

Les générateurs de Virasoro pour le système total $X \oplus (b,c)$

$$L_m = L_m^X + L_m^{gh} - a\,\delta_{m,0}$$

satisfont donc

$$[L_m, L_n] = (m-n)\,L_{m+n} + A(m)\,\delta_{m+n}$$

où $$A(m) = \frac{D}{12}\,m(m^2-1) + \frac{1}{6}(m - 13m^3) + 2am$$

L'anomalie disparait donc précisement lorsque $D = 26$, $a = 1$.

On montre que cette condition est aussi nécessaire et suffisante pour que $Q_B^2 = 0$, où Q_B est donné par la formule de Noether,

$$Q_B = \int_0^{\bar\sigma} d\sigma \left(c\,T^X + \frac{1}{2} :c\,T^{gh}: \right)$$

$$= \int_0^{\bar\sigma} d\sigma \quad c\,T^X + :bc\,\partial c:$$

$$= \sum_n c_n L_{-n}^X + \sum_{m,n} \frac{m-n}{2} :c_m c_n b_{-m-n}: - c_0$$

Pour la corde fermée, on construit deux operateurs Q_B et $\bar{Q}_B$, l'opérateur BRST est $Q_B + \bar{Q}_B$.

* La quantification des fantômes se fait comme dans le cas de la particule libre : les modes zéro b_0 et c_0 vérifient

$$b_0^2 = c_0^2 = 0, \qquad \{b_0, c_0\} = 1$$

Ils se représentent donc dans un espace à 2 états :

$$b_0|\downarrow\rangle = 0, \qquad b_0|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$$

$$c_0|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle, \qquad c_0|\uparrow\rangle = 0$$

et on demande de plus

$$b_{n>0}\,|\updownarrow\rangle = c_{n>0}\,|\updownarrow\rangle = 0$$

[Vérification de l'algèbre de Virasoro :

$$\langle 0|\,[L_1^{gh}, L_{-1}^{gh}]\,|0\rangle = \langle 0|\,L_1^{gh} L_{-1}^{gh}\,|0\rangle$$

$$= \langle 0|(b_1c_0 + 2b_0c_1)(-b_{-1}c_0 - 2b_0c_{-1})|0\rangle$$

$$= -2\,\langle 0|\,b_1c_0b_0c_{-1} + b_0c_1b_{-1}c_0\,|0\rangle$$

$$= -2\,\langle 0|\,b_0c_0 + c_0b_0\,|0\rangle$$

$$= -2$$

en accord avec $\frac{1}{6}(m - 13m^3)\Big|_{m=1} = -\frac{12}{6} = -2$.

On peut aussi faire le calcul sur $|\uparrow\rangle$:

$$\langle\uparrow|\,[L_1, L_{-1}]\,|\uparrow\rangle = \langle\uparrow|(b_1c_0 + \underbrace{2b_0c_{+1}}_{=0})(\underbrace{-b_{-1}c_0}_{=0} - 2b_0c_{-1})|\uparrow\rangle$$

$$= -2\,\langle\uparrow|\,b_1c_0b_0c_{-1}\,|\uparrow\rangle$$

$$= -2\,\langle\downarrow|\,b_1c_{-1}\,|\downarrow\rangle$$

$$= -2.$$

$$\langle\uparrow|\,[L_2, L_{-2}]\,|\uparrow\rangle = \langle\uparrow|(2b_2c_0 + 3b_1c_1 + 4b_0c_2)(-2b_{-2}c_0 - 3b_{-1}c_{-1} - 4b_0c_{-2})|\uparrow\rangle$$

$$= -8\,\langle\uparrow|\,b_2c_0b_0c_{-2}\,|\uparrow\rangle - 9\,\langle\uparrow|\,b_1c_1b_{-1}c_{-1}\,|\uparrow\rangle$$

$$= -8 - 9 = -17$$

en accord avec $\frac{1}{6}(m - 13m^3)\Big|_{m=2} = -17$

⚠ $\langle\uparrow|c_0 = \langle\uparrow| \qquad \langle\downarrow|c_0 = 0$

$\langle\uparrow|b_0 = 0 \qquad \langle\downarrow|b_0 = \langle\uparrow|$

afin que $\langle\uparrow|\,c_0b_0 + b_0c_0\,|\uparrow\rangle = 1$!!]

Les états physiques sont ceux qui vérifient $Q_B|\psi\rangle = 0$, modulo les états Q_B-exacts, $|\psi\rangle \sim |\psi\rangle + Q_B|\chi\rangle$ et tels que $b_0|\psi\rangle = 0$ (condition de Siegel)

Nous pouvons maintenant calculer le spectre des états physiques de la corde ouverte :

. niveau 0 : $Q_B|\downarrow, p\rangle = (L_0^X - 1)\, c_0 |\downarrow, p\rangle = 0$

si $L_0^X = 1$, soit $m^2 \ell_s^2 = -1$: tachyon

. niveau 1 : l'état le plus général est

$$|\psi\rangle = \xi^\mu \alpha_{-1}^\mu + \xi_1 c_{-1} + \xi_2 b_{-1} |\downarrow, p\rangle$$

soit 28 paramètres ;

$$Q_B|\psi\rangle = \left[c_0 p^2 (\xi.\alpha_{-1} + \xi_1.c_{-1} + \xi_2 b_{-1}) + (p.\xi)\, c_{-1} + \xi_2\, p.\alpha_{-1} \right] |\downarrow, p\rangle$$

$|\psi\rangle$ est Q_B-fermé si $p^2 = 0$, $p.\xi$, $\xi_2 = 0$

Les états Q_B-exacts sont de la forme

$$Q_B|\chi\rangle = (p.\xi')\, c_{-1} + \xi_2'\, p.\alpha_{-1} |\downarrow, p\rangle, \quad p^2 = 0$$

ce qui montre que le terme ξ_1 et la partie de ξ^μ parallèle à p^μ dans $|\psi\rangle$ peuvent être absorbés par une transformation de jauge.

On trouve donc bien que l'on a affaire à un boson de jauge de masse nulle,

$$|\psi\rangle = \xi^\mu \alpha_{-1}^\mu |\downarrow, p\rangle, \quad p^2 = 0$$

$$\xi^\mu \sim \xi^\mu + p^\mu$$

C'est en accord avec la quantification dans la jauge du cône de lumière, ou la quantification covariante "à l'ancienne".

Remarque :

Dans notre traitement "à la Fadde-Popov" de la corde bosonique, nous avons supposé que l'on pouvait toujours se ramener à la métrique plate par une transformation $\xi \in$ diff $\ltimes$ Weyl.

Cela est vrai localement mais non globalement :

* Il arrive que certains difféomorphismes puissent être réabsorbés par une transformation de Weyl :

$$(P.\xi)_{\alpha\beta} = 0$$

$$\Lambda + \frac{1}{2} \nabla_\gamma \xi^\gamma = 0$$

Ce sont les "vecteurs de Killing conformes", présents en genre 0 (le groupe conforme $Sl(2,\mathbb{R}) \times Sl(2,\mathbb{R})$ de la sphère) et en genre 1 (les translations du tore) uniquement ; pour éviter un double comptage, il faut diviser par le volume du groupe de symétrie.

* Il arrive aussi que certaines déformations de la métrique ne puissent être compensées par une combinaison de diff $\ltimes$ Weyl : ce sont les solutions de

$$(P^+ b)_\alpha = 0$$

où P^+ est l'opérateur hermitique-conjugué de P :

$$(P^+ b)_\alpha = -2 \nabla^\beta b_{\alpha\beta}$$

Il y a en général $6g-6$ solutions à cette équation si $g \geq 2$ (2 si $g=1$, 0 si $g=0$). Elles donnent lieu à un nombre fini de "paramètres de Teichmüller" sur lesquels on doit intégrer. (Le cas du temps propre de Schwinger était un exemple de paramètre de Teichmüller pour la particule ponctuelle)

Théories des cordes – exercices. 3 : Quantification sur le cône de lumière

1. Théorie des champs sur le cône de lumière

- On considère l'équation de Maxwell $\partial_\rho(\partial^\rho A_\nu - \partial^\nu A_\rho) = 0$ en dim. D, dans la jauge $A_+ = 0$. Montrer qu'elle décrit D-2 degrés de liberté on-shell, de masse nulle, se transformant comme un vecteur de SO(D-2).
- On considère l'équation d'Einstein linéarisée en dimension D

$$\Box h_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu(\eta^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma}) - \partial_\rho(\partial_\mu h_\nu{}^\rho + \partial_\nu h_\mu{}^\rho) = 0 \qquad (*)$$

Vérifier l'invariance de jauge $\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu$

En choisissant la jauge $h_{++} = h_{+-} = h_{+i} = 0$, montrer que $(*)$ décrit $D(D-3)/2$ degrés de liberté de masse nulle, se transformant comme un tenseur symétrique de trace nulle sous SO(D-2)

2. Montrer que les états du deuxième niveau excité ($N^\perp = \bar N^\perp = 2$) de la corde bosonique fermée s'organisent en représentations du "petit groupe massif" SO(D-1). (On pourra traiter d'abord le cas de la corde ouverte)

3. Vérifier que les opérateurs $p^+\alpha^-_m$ satisfont à l'algèbre de Virasoro,

$$[p^+\alpha^-_m, p^+\alpha^-_n] = (m-n)\,p^+\alpha^-_{m+n} + \left[\frac{D-2}{12}(m^3-m) + 2am\right]\delta_{m+n}$$

4. Vérifier que l'opérateur Ω de parité sur la feuille d'univers agit dans l'espace de Fock des cordes ouvertes avec conditions au bord DD selon

$$\Omega\,\alpha^\mu_k\,\Omega^{-1} = (-1)^{k+1}\alpha^\mu_k$$

Même question pour DN et ND.

Théorie des cordes – exercices 4 : Quantification par intégrale de chemin

1. Appliquer brièvement la méthode de Fadeev-Popov à la quantification de la théorie de Maxwell dans la jauge de Lorentz, $\partial_\mu A^\mu = 0$

2. Déterminer les constantes de structure $f^{\tau_1}_{\tau_2\tau_3}$ de l'algèbre des difféomorphismes de τ, dans la base

$$\delta_{\tau_1} f(\tau) = -\delta(\tau-\tau_1)\,\partial_\tau f(\tau)$$

En déduire l'action de la symétrie BRST sur les champs (X^μ, e, B, b, c) de la particule libre, dans la jauge $F = 1 - e \equiv 0$. Vérifier que l'action $S = \int d\tau \left(\frac{1}{2e}(\dot X^\mu)^2 + \frac{1}{2}em^2 + iB(e-1) - e\dot b c\right)$ est invariante.

3. La métrique $ds^2 = \dfrac{dz\,d\bar z}{(1+z\bar z)^2}$ décrit la sphère S_2. Déterminer les vecteurs de Killing conformes. Montrer qu'ils engendrent le groupe $Sl(2,\mathbb{R}) \times Sl(2,\mathbb{R})$.

4. La métrique $ds^2 = \dfrac{(dx+\tau dy)(dx+\bar\tau dy)}{\tau_2}$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, τ fixé, $\tau_2 = \mathrm{Im}\,\tau > 0$ décrit le tore $T^2(\tau)$

Montrer que si $\tau' = \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $ad-bc = 1$

alors $T^2(\tau)$ et $T^2(\tau')$ sont équivalents par un difféomorphisme globalement bien défini. Montrer que par une transformation de ce type, on peut toujours se ramener au "domaine fondamental" $\mathcal{F} = \{|\tau| \geq 1,\ -\frac12 \le \mathrm{Re}(\tau) \le \frac12\}$. Tracer $\mathcal{F}$.

5. Déterminer les états physiques de masse nulle de la corde fermée dans le formalisme BRST. Discuter leurs invariances de jauge.

6. Montrer que $Q^2 = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left([L_m, L_n] - (m-n)L_{m+n}\right)c_{-m}c_{-n}$.