Cordes relativistes classiques

1. Rappels sur la particule relativiste :

les Trajectoires classiques extremisent l'action

a. $$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} m \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}\, d\tau =: \int \mathcal{L}\, d\tau \qquad \eta_{\mu\nu} = \underbrace{(-1, 1, 1, \dots)}_{D \text{ dimension}}$$

avec
$$x^\mu(\tau_i) = x_0^\mu$$
$$x^\mu(\tau_f) = x_1^\mu$$

Cette action est invariante sous les reparamétrisations du "temps" τ :

$\tau' = \tau'(\tau)$:

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} m \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'} \left(\frac{d\tau'}{d\tau}\right)^2}\, \left|\frac{d\tau'}{d\tau}\right| d\tau$$
$$= \int_{\tau_i'}^{\tau_f'} m \sqrt{-\eta^{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'}}\, d\tau'$$

Pas de perte de généralité à supposer $\tau_i = 0$, $\tau_f = 1$.

Moment : $$p_\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m\, \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \qquad (*)$$

equation du mvt : $$\frac{d}{d\tau} p_\mu = 0$$

$(*)$ implique $$p_\mu^2 = p_\mu p_\nu \eta^{\mu\nu} = -m^2$$
"condition de couche de masse"

Hamiltonien canonique :
$$H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = \frac{-m\,(\dot{x}^\mu)^2}{\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} - m\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = 0$$
(c'est une conséquence générale de l'invariance sous reparam)

⚠ H est le Hamiltonien de ligne d'univers, à ne pas confondre avec p_0, le générateur des translations par rapport au temps dans l'espace-cible!

b. En vue de quantifier ce système, il est plus pratique de considérer une action équivalente :

$$\tilde{S} = -\frac{1}{2}\int d\tau \left[\frac{(\dot{x}^\mu)^2}{e} - m^2 e \right]$$

où $e(\tau)$ est une variable supplémentaire.

équations du mvt :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}\frac{1}{e}\frac{d}{d\tau} x^\mu = 0 & (i) \\ (\dot{x}^\mu)^2 + m^2 e^2 = 0 & (ii) \end{cases}$$

$$(ii) \Rightarrow \quad e = +\frac{1}{m}\sqrt{-(\dot{x})^2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{S} = \int d\tau\, m\sqrt{-\dot{x}^2}$$

comme avant

$$p_\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\dot{x}^\mu}{e} \quad \Rightarrow \quad p_\mu = \frac{m\,\dot{x}^\mu}{\sqrt{-(\dot{x})^2}}$$

Cette action est toujours invariante sous les difféomorphismes de τ :

$$\delta x^\mu(\tau) = \xi(\tau)\,\dot{x}^\mu + O(\xi^2)$$
$$\delta e(\tau) = \partial_\tau\left[\xi(\tau)\,e(\tau)\right] + O(\xi^2)$$

<u>exercice</u> vérifier que δS = dérivée totale $+ O(\xi^2)$

En fait, on peut voir $g_{\tau\tau} = e^2(\tau)$ comme une métrique sur la "ligne d'univers", et réécrire

$$S = -\frac{1}{2}\int d\tau \sqrt{\det g}\left(g^{\tau\tau}\,\partial_\tau x^\mu\,\partial_\tau x^\nu - m^2\right)$$

dont l'invariance est maintenant manifeste.

Cette fois, $H_{\text{canonique}} = -p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = -\frac{1}{2}e\left(p_\mu^2 + m^2\right)$

e est un multiplicateur de Lagrange : $H = 0$ sur couche de masse.

c. <u>Première quantification</u> :

La quantification canonique de ce système consiste à remplacer x^μ, p_μ par des opérateurs agissant dans un espace de Hilbert $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^D)$:

$$\{x^\mu, p^\nu\}_{PB} = \eta^{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad [x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}$$

soit
$$p_\mu = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

[Rappel : $\{f,g\}_{PB} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial g}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial p_\mu}\frac{\partial g}{\partial x^\mu}$ est le crochet de Poisson, ou "Poisson Bracket"

L'équation de couche de masse $p_\mu^2 + m^2 = 0$ devient l'<u>équation de Klein-Gordon</u>

$$\left(-\eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} + m^2\right)\psi(x^\mu) = 0$$

dont les solutions sont des ondes planes :

$$\psi(x^\mu) = \int a(p)\, e^{ip_\mu x^\mu}\, d^{n-1}p$$

où $p_\mu^2 + m^2 = 0$.

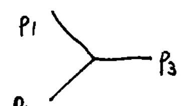
La théorie quantique des champs peut en principe être construite en formalisme de "première quantification" à partir du <u>propagateur</u>

$$\langle x | x' \rangle = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{d^D p'}{(2\pi)^D}\, e^{-ip'x' + ipx}\langle p | p' \rangle$$

avec $\langle p | p' \rangle = (2\pi)^D\,\delta^D(p-p')\,\frac{1}{p^2+m^2}$

Soit
$$\langle x | x' \rangle = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{e^{ip(x-x')}}{p^2+m^2}$$

où l'on utilise la prescription de Feynman pour le contour et des vertex d'interaction, par exemple



$$(2\pi)^D\,\delta(p_1+p_2+p_3)\,g$$

d. Intégrale fonctionnelle

De manière équivalente, on peut calculer le propagateur par une intégrale de "chemins" :

$$\langle x|x'\rangle = \hat{N}\int_{x(0)=x}^{x(1)=x'} \mathcal{D}e\, \mathcal{D}x^\mu \exp\left[\frac{i}{2}\int_0^1\left(\frac{(\dot{x})^2}{e} - m^2 e\right)d\tau\right]$$

Pour donner du sens à cette intégrale, il faut faire une continuation de Wick à la fois dans l'espace-cible, et sur la ligne d'univers : $\begin{bmatrix} e\to -ie \\ x^0 \to -ix^0\end{bmatrix}$: $\exp[\;] \to \exp\left[-\frac{1}{2}\int\left(\frac{(\dot{x}^0)^2+(\dot{x}^i)^2}{2e} + m^2 e\right)d\tau\right]$

Invariance sous reparam $\Rightarrow$ il faut diviser par le volume (infini) du groupe de jauge ; ou fixer la jauge

On peut toujours choisir $e(\tau) = \text{cste}$, la cste étant fixée à L :

$L = \int_0^1 e(\tau)\, d\tau$ est invariant de jauge

$$\langle x|x'\rangle = \hat{N}'\int_0^{+\infty} dL \int_{x(0)=x}^{x(1)=x'} \mathcal{D}x^\mu \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{(\dot{x})^2}{L} + Lm^2\right)d\tau\right]$$

Définissons $x^\mu(\tau) = \underbrace{x^\mu + (x^{\mu\prime} - x^\mu)\tau}_{\text{solution classique}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{L}}\,\delta x^\mu(\tau)}_{\text{fluctuation}}$

fluctuation $\delta x^\mu(0) = 0$, $\delta x^\mu(1) = 0$

La mesure d'intégration sur δx^μ est

$$\|\delta x\|^2 = \int_0^1 d\tau\; e(\delta x^\mu)^2 = \int_0^1 d\tau\, (\delta x^\mu)^2$$

soit $\mathcal{D}x^\mu = \text{"}\prod_\tau\text{"}\, d(\delta x^\mu)$

Ainsi

$$\langle x|x'\rangle = \hat{N}'\int_0^{+\infty} dL \int \prod d(\delta x^\mu)\, \exp\left[-\frac{1}{2L}(x-x')^2 - m^2 L - \frac{1}{2L^2}\int d\tau\, (\delta\dot{x}^\mu)^2\right]$$

L'intégrale sur δx^μ est Gaussienne, égale à

$$\Delta = \left(\det\left[-\frac{1}{L^2}\partial_\tau^2\right]\right)^{-D/2}$$

Les valeurs propres de cet opérateur sont

$$\lambda_n = \frac{n^2}{L^2} \qquad \psi_n = \sin(n\pi\tau), \quad n \neq 0$$

soit $\Delta = \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{L^2}\right)^{-D/2}$

On utilise la régularisation par fonction ζ

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \qquad \zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\log n$$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log 2\pi$$

$$\log\Delta = -\frac{D}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(2\log n - 2\log L)\right)$$

$$= D\,\zeta'(0) + D\log L\,\zeta(0)$$

$$= -\frac{D}{2}\log 2\pi - \frac{D}{2}\log L$$

So $\Delta = (2\pi L)^{-D/2}$

Ainsi

$$\langle x|x'\rangle = \hat{N}'\int_0^{+\infty} dL\,(2\pi L)^{D/2}\exp\left[-\frac{1}{2L}(x-x')^2 - m^2 L\right]$$

$$= \hat{N}'\cdot\frac{2}{(2\pi)^{D/2}}\left(\frac{|x-x'|}{m}\right)^{\frac{2-D}{2}} K_{\frac{D-2}{2}}(m|x-x'|)$$

où $K_s(x)$ est la fonction de Bessel modifiée

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+s}}\, e^{-at-b/t} = 2\left(\frac{a}{b}\right)^{s/2} K_s(2\sqrt{ab})$$

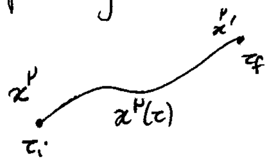
$$K_s(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}$$

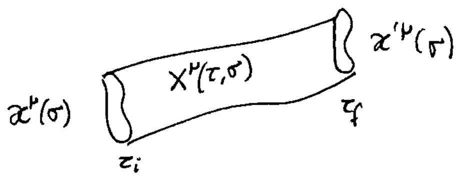
On ajuste $\hat{N}' = \frac{1}{2}$ pour obtenir la normalisation correcte à courte distance

2. La corde relativiste classique

a. Tout comme une particule relativiste décrit une "ligne d'univers" dans l'espace-cible, dont l'action est proportionnelle à la longueur (de Minkowski),
une corde relativiste décrit une "surface d'univers" plongée dans l'espace-cible, dont l'action est proportionnelle à l'aire :

$$S_{part} = \int d\tau \, m\sqrt{-\dot{x}^2} \quad \Rightarrow \quad S_{corde} = -T\int dA$$





T est homogène à $m^2 \sim \frac{1}{L^2}$: la <u>tension</u> de la corde

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \qquad \ell_s = \sqrt{\alpha'} = \frac{1}{M_s}$$

$X^\mu(\tau,\sigma)$ décrit le plongement surface d'univers $\longrightarrow$ espace-cible

Il induit par "pull-back" (restriction) une métrique sur la surface d'univers :

$$\eta_{\mu\nu}\, dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \qquad \xi^0 = \tau, \ \xi^1 = \sigma$$

$$:= G_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

dA est l'élément d'aire correspondant : $dA = \sqrt{\det G_{\alpha\beta}}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta$

$$S_{Nambu} = -T \int_{\substack{X^\mu(\tau_i,\sigma) = x^\mu(\sigma) \\ X^\mu(\tau_f,\sigma) = x'^\mu(\sigma)}} d\tau\, d\sigma \sqrt{\left(\partial_\sigma X^\mu \partial_\tau X^\nu \eta_{\mu\nu}\right)^2 - (\partial_\sigma X^\mu)^2 (\partial_\tau X^\mu)^2}$$

"Action de Nambu-Goto"

Les équations du mvt s'obtiennent en extrémisant S_{Nambu} ;

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\tau X^\mu)} = -T \frac{(\mathring{X}\cdot X')\, X'^\mu - (X')^2 \mathring{X}^\mu}{\sqrt{(X'\cdot\mathring{X})^2 - (X')^2(\mathring{X})^2}} \qquad \begin{aligned} X' &= \partial/\partial_\sigma X \\ \mathring{X} &= \partial/\partial_\tau X \end{aligned}$$

le moment canonique satisfait 2 contraintes

$$\begin{cases} \Pi \cdot X' = 0 \\ \Pi^2 + T^2 (X')^2 = 0 \end{cases} , \qquad H_{can} = \int d\sigma \, 0 .$$

qui reflètent l'invariance de S_{Nambu} par rapport aux difféomorphismes de τ <u>et</u> σ.

(Comparant avec $p^2 + m^2 = 0$ dans la particule, on voit que $T^2 (X')^2$ se comporte comme une masse^2 ; chaque mode d'oscillation donne lieu à une particule de masse différente)

Les équations du mvt sont

$$\partial_\tau \Pi^\mu + \partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}\right) = 0$$

Il est nécessaire d'imposer des conditions de bord :

- cordes fermées : $X^\mu(\sigma + \bar\sigma) = X^\mu$, $\bar\sigma = 2\pi$ (convention
- cordes ouvertes : $\left.\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\sigma X^\mu)} = 0\right|_{\sigma=0,\bar\sigma}$: condition de Neumann

ou

$$\left.\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\tau X^\mu)}\right|_{\sigma=0,\bar\sigma} = 0 \ : \ \text{condition de Dirichlet}$$

Par convention, on choisit $\bar\sigma = 2\pi$ (cordes fermées)
$\bar\sigma = \pi$ (cordes ouvertes)

Neumann $\Rightarrow$ extrémités libres ; Dirichlet $\Rightarrow$ attachées à un "défaut

b. A niveau, afin de quantifier il est préférable de considérer une action équivalente classiquement :

$$S_{\text{Polyakov}} = -\frac{T}{2}\int d^2\xi \sqrt{-\det g}\,\left(g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha X^\mu\,\partial_\beta X^\nu\,\eta_{\mu\nu}\right)$$

où $g_{\alpha\beta}(\tau,\sigma)$ est une "métrique de surface d'univers"

les équations du mvt de $g_{\alpha\beta}$ donnent

$$T_{\alpha\beta} \equiv \frac{-4\pi}{\sqrt{-\det g}}\,\frac{\delta S_{\text{Polyakov}}}{\delta g^{\alpha\beta}} \equiv 0$$

où $T_{\alpha\beta}$ est le tenseur énergie-impulsion sur la surface d'univers :

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\ell_s^2}\left[\partial_\alpha X^\mu\,\partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}\,g^{\gamma\delta}\,\partial_\gamma X^\mu\,\partial_\delta X_\mu\right]$$

Ainsi, $T_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \quad g_{\alpha\beta} = \lambda\left(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}\right)$

où λ est une fonction arbitraire :

$g_{\alpha\beta}$ est donc proportionnel à la métrique induite $G_{\alpha\beta}$

et $S_{\text{Polyakov}} = S_{\text{Nambu}}$

le fait que λ reste arbitraire reflète l'invariance de S_{Polyakov} sous les <u>transformations de Weyl</u>

$$g_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta}\, e^{2\phi}$$
$$\sqrt{\det(-g)} \to e^{2\phi}\sqrt{\det(-g)}$$
$$g^{\alpha\beta} \to g^{\alpha\beta}\, e^{-2\phi}$$

Remarque : cette sym ici implique $T_\alpha^{\ \alpha} = 0$

C'est une particularité des surfaces à 2 dimensions

⚠ il serait ++ difficile de quantifier des "membranes"

<u>Remarque</u> : l'invariance sous les difféo autorise d'autres termes dans l'action ; les termes relevants ou marginaux sont

$$\iint\left\{\lambda\sqrt{-\det g} + \sqrt{-\det g}\left(\phi\, R^{(2)} + g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}\right) + \varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\,\partial_\beta X^\nu\, B_{\mu\nu}\right\}$$

- λ est un terme de "cste cosmologique" (sur la surface d'univers) dont l'existence serait catastrophique $\Rightarrow g_{\alpha\beta} = 0$!
- ϕ ne modifie pas la dynamique, car $\int\sqrt{-\det g}\, R^{(2)}$ est un invariant topologique dit caractéristique d'Euler :

$$\chi = \underbrace{2 - 2h}_{h \,=\, \#\text{"manches"}} - \underbrace{b}_{b \,=\, \#\text{bords}}$$

- $B_{\mu\nu}$ est aussi proportionnel à une dérivée totale. Il devient important si $\chi < 2$.
- En général, $\eta_{\mu\nu}$, ϕ, $B_{\mu\nu}$ peuvent devenir des fonctions non triviales de la coordonnée X^μ d'espace-cible.
  La symétrie de Weyl n'est préservée au niveau quantique que lorsque (η, ϕ, B) vérifient certaines équations, qui généralisent l'équation d'Einstein ! (voir plus loin)

$\eta_{\mu\nu} \to$ graviton
$\phi \to$ dilaton
$B_{\mu\nu} \to$ tenseur de Kalb-Ramond

c. En combinant l'invariance sous les difféo $\rightarrow g_{\alpha\beta} = e^{2\phi}\eta_{\alpha\beta}$

[Théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann] $\qquad \eta_{\alpha\beta} = (-1,+1)$

et l'invariance sous les transformations de Weyl, on peut choisir localement

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \qquad \text{dit "jauge conforme"}$$

Globalement, cela est possible sur la sphère ("ordre des arbres") mais si $\chi < 2$ il reste un nombre fini de param. de Teichmüller.

Définissons
$$\xi_+ = \tau + \sigma$$
$$\xi_- = \tau - \sigma \qquad \Rightarrow g_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta = -d\xi_+ d\xi_-$$
$$\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)$$

$\xi_\pm$ sont les "coordonnées de cone de lumière"

L'action de Polyakov devient

$$S_{Polyakov} = 2T \int d^2\xi\ \partial_+ X^\mu \partial_- X_\mu$$

⚠ Le choix de jauge ne fixe pas tous les difféo, car on peut encore changer

$$\xi_+ \rightarrow f(\xi_+) \qquad ds^2 \rightarrow -\underbrace{f'g'}_{\text{disparaît par Weyl}}\, d\xi_+ d\xi_-$$
$$\xi_- \rightarrow g(\xi_-)$$

Nous reviendrons sur ce point

Les équations du mvt sont donc $\partial_+\partial_- X^\mu = 0$
dont les solutions s'écrivent

$$X^\mu(\tau,\sigma) = \underbrace{X^\mu_L(\tau+\sigma)}_{\text{"left movers"}} + \underbrace{X^\mu_R(\tau-\sigma)}_{\text{"right movers"}}$$

Cependant, il faut encore imposer les équations du mouvement de $g_{\alpha\beta}$, ie $T_{\alpha\beta} = 0$: 2 équations seulement, car $T_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} = 0$

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{4}(\dot{X}^2 + X'^2)$$
$$T_{01} = T_{10} = \frac{1}{2}\dot{X}.X'$$

"Contraintes de Virasoro"

Si on préfère : $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$

soit $T_{++} = T_{--} = 0$

$$T_{++} = \frac{1}{2}\partial_+ X.\partial_+ X$$
$$T_{--} = \frac{1}{2}\partial_- X.\partial_- X$$
$$T_{+-} = 0 \quad \text{car} \quad T_\alpha{}^\alpha = 0$$

La conservation du tenseur énergie-impulsion $\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$ donne

$$\begin{cases} \partial_- T_{++} = 0 \\ \partial_+ T_{--} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} T_{++} = T_{++}(\xi^+) \\ T_{--} = T_{--}(\xi^-) \end{array}$$

Ces relations reflètent l'invariance conforme résiduelle : pour toute fonction $f(\xi^+)$,

$Q_f = \int_0^{\bar\sigma} f(\xi^+)\, T_{++}(\xi^+)\, d\sigma$ est conservée :

$$\frac{dQ_f}{d\tau} = \int_0^{\bar\sigma} \dot{f}\, T_{++} + f\, \dot{T}_{++}$$
$$= + \int_0^{\bar\sigma} (f'\, T_{++} + f\, T'_{++})$$
$$= + (f\, T_{++})\Big|_0^{\bar\sigma}$$
$$= 0 \quad \text{cordes fermées}$$

De même, on définit
$\bar{Q}_g = \int_0^{\bar\sigma} g(\xi^-)\, T_{--}(\xi^-)\, d\sigma$
$\frac{d\bar{Q}_g}{d\tau} = -(g\, T_{--})\Big|^{\bar\sigma}$

En particulier,

$$(2TQ_1 \equiv) \quad L_0 = 2T\int_0^{2\pi} T_{--}\, d\sigma = \frac{T}{4}\int_0^{2\pi}\left(\dot{X}^2 + X'^2 - 2\dot{X}X'\right) d\sigma$$

$$(2T\bar{Q}_1 \equiv) \quad \bar{L}_0 = 2T\int_0^{2\pi} T_{++}\, d\sigma = \frac{T}{4}\int_0^{2\pi}\left(\dot{X}^2 + X'^2 + 2\dot{X}X'\right) d\sigma$$

génèrent les translations selon ξ^- et ξ^+ ;

$$L_0 + \bar{L}_0 = \frac{T}{2}\int_0^{2\pi}\left(\dot{X}^2 + X'^2\right) = H$$

génère les translations selon τ : Hamiltonien de feuille d'univers

$$L_0 - \bar{L}_0 = -T\int_0^{2\pi} \dot{X}.X' = P$$

génère les translations selon σ : Moment de feuille d'univers, ou "spin"

les conditions $L_0 = \bar{L}_0 = 0$, ou $H = P = 0$, conséquences des contraintes de Virasoro, généralisent la condition de couche de masse $H=0$ de la particule relativiste.

Plus généralement, on définit les modes de Fourier

$$L_m = 2T\int_0^{2\pi} d\sigma\, T_{--}\, e^{im(\tau-\sigma)} \quad ; \quad L_m^* = L_{-m}$$

$$\bar{L}_m = 2T\int_0^{2\pi} d\sigma\, T_{++}\, e^{im(\tau+\sigma)} \quad ; \quad \bar{L}_m^* = \bar{L}_{-m}$$

On va montrer plus loin qu'ils génèrent une algèbre dite de Virasoro (classique), qui reflète l'invariance sous les difféomorphismes.

Pour les cordes ouvertes, seule une combinaison linéaire de T_{++} et T_{--} est conservée, ie $Q_f + \bar{Q}_f$

(car en $\sigma = 0, \bar{\sigma}$, $T_{++} = T_{--}$ pour les conditions N ou D)

Remarque : il existe aussi d'autres charges conservées, associées à la symétrie de Poincaré :

$$P_\mu^\alpha = -T\sqrt{-\det g}\; g^{\alpha\beta}\partial_\beta X_\mu$$

$$J_{\mu\nu}^\alpha = -T\sqrt{-\det g}\; g^{\alpha\beta}\left(X_\mu \partial_\beta X_\nu - X_\nu \partial_\beta X_\mu\right)$$

Exercice : vérifier $\partial_\alpha P_\mu^\alpha = 0$, $\partial_\alpha J_{\mu\nu}^\alpha = 0$ pour les cordes fermées, et cordes ouvertes avec conditions de Neumann

Dans la jauge conforme, la solution générale des eqs du mvt est donc

$$X^\mu = X_L^\mu + X_R^\mu$$

$$X_L^\mu = \frac{x^\mu}{2} + \frac{l_s^2 \bar{p}^\mu}{2}(\tau+\sigma) + \frac{i l_s}{\sqrt{2}}\sum_{k\neq 0}\frac{\bar{\alpha}_k^\mu}{k}\, e^{-ik(\tau+\sigma)}$$

$$X_R^\mu = \frac{x^\mu}{2} + \frac{l_s^2}{2}p^\mu(\tau-\sigma) + \frac{i l_s}{\sqrt{2}}\sum_{k\neq 0}\frac{\alpha_k^\mu}{k}\, e^{-ik(\tau-\sigma)}$$

où $x^\mu, p^\mu, \bar{p}^\mu$ sont réels, et

$$(\alpha_k^\mu)^* = \alpha_{-k}^\mu \quad , \quad (\bar{\alpha}_k^\mu)^* = \bar{\alpha}_{-k}^\mu$$

Il faut encore imposer les conditions au bord.

d. Pour les cordes fermées :

Si toutes les dimensions de l'espace cible sont non-compactes, on impose $X^\mu(\tau, \sigma+2\pi) = X^\mu(\tau,\sigma)$

donc $\left[\begin{array}{l} k \in \mathbb{Z}. \\ p^\mu = \bar{p}^\mu \end{array}\right.$ Les modes α_k^μ et $\bar{\alpha}_k^\mu$ sont indépendants.

Définissons

$$\alpha_0^\mu := \frac{l_s}{\sqrt{2}} p^\mu$$

$$\bar{\alpha}_0^\mu := \frac{l_s}{\sqrt{2}} \bar{p}^\mu$$

Ainsi

$$\partial_- X_R^\mu = \frac{l_s}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}$$

$$\partial_+ X_L^\mu = \frac{l_s}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}$$

Le "centre de masse" de la corde est situé à

$$X^\mu_{CM} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma\, X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu + l_s^2 p^\mu \tau$$

La corde se déplace donc dans son ensemble comme une particule libre. Son moment total est

$$P^\mu = T\int_0^{2\pi} d\sigma\, \dot{X}^\mu$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\pi l_s} \cdot \int_0^{2\pi} d\sigma \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_0^\mu + \bar{\alpha}_0^\mu) = p^\mu \quad \text{comme attendu.}$$

Les modes de Fourier de T_{++}, T_{--} sont

$$L_m = T\int_0^{2\pi} \partial_- X\cdot\partial_- X = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_{m-n}^\mu \cdot \alpha_{n\,\mu}$$

$$\bar{L}_m = T\int_0^{2\pi} \partial_+ X\, \partial_+ X = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{m-n}\, \bar{\alpha}_n$$

En particulier,

$$L_0 = \frac{l_s^2}{4} p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n$$

$$\bar{L}_0 = \frac{l_s^2}{4} p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-n}\bar{\alpha}_n$$

et le Hamiltonien de surface d'univers est

$$H = L_0 + \bar{L}_0$$

$$= \frac{l_s^2}{2} p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_{-n}\alpha_n + \bar{\alpha}_{-n}\bar{\alpha}_n\right)$$

Les crochets de Poisson canoniques à temps égaux

$$\left\{ X^\mu(\sigma,\tau), \dot{X}^\nu(\sigma',\tau)\right\}_{PB} = \frac{1}{T}\delta(\sigma-\sigma')\,\eta^{\mu\nu}$$

impliquent

$$\{\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu\}_{PB} = -i\delta_{m+n}\,\eta^{\mu\nu}$$

$$\{\bar{\alpha}_m^\mu, \bar{\alpha}_n^\nu\}_{PB} = -i\delta_{m+n}\,\eta^{\mu\nu}$$

$$\{\alpha, \bar{\alpha}\}_{PB} = 0$$

$$\{x^\mu, p^\nu\}_{PB} = \eta^{\mu\nu}$$

On vérifie qu'en effet,

$$d\alpha_n^\mu/d\tau = -\{H, \alpha_n^\mu\}_{PB}$$

$$dx^\mu/d\tau = -\{H, x^\mu\}_{PB}$$

$$dp^\mu/d\tau = 0$$

On établit également que

$$\{L_m, L_n\}_{PB} = -i(m-n)L_{m+n}$$

$$\{\bar{L}_m, \bar{L}_n\}_{PB} = -i(m-n)\bar{L}_{m+n}$$

$$\{L_m, \bar{L}_n\}_{PB} = 0$$

Comparer avec :
$[e^{im\theta}\partial_\theta, e^{in\theta}\partial_\theta]$
$= i(n-m)e^{i(m+n)\theta}\partial_\theta$

$(L_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ obéit à l'algèbre des difféomorphismes du cercle, dite quelquefois "algèbre de Virasoro classique". Elle reflète l'invariance conforme classique de S_{Polyakov}.

e- <u>Pour les cordes ouvertes</u> :

Considérons le cas "NN" : conditions de Neumann aux deux bords.

La condition
$$X^{\mu\prime}(\tau, 0) = 0$$
$$X^{\mu\prime}(\tau, \pi) = 0$$

donne $p^\mu = \bar{p}^\mu$, $\alpha_k^\mu = \bar{\alpha}_k^\mu$, $k \in \mathbb{Z}$

Il est d'usage de redéfinir p^μ par un facteur 2 ;
la solution générale est donc

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu + 2\ell_s^2 p^\mu \tau + i\sqrt{2}\,\ell_s \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{\alpha_n^\mu}{n} \cos(n\sigma) e^{-in\tau}$$

Setting $\alpha_0^\mu = \sqrt{2}\,\ell_s p^\mu$, we get

$$\partial_\pm X^\mu = \sqrt{2}\,\ell_s \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau\pm\sigma)}$$

La position du centre de masse est

$$X^\mu_{CM} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma\, X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu + 2\ell_s^2 p_\mu \tau$$

Le moment conservé est

$$P^\mu = T\int_0^\pi d\sigma\, \dot{X}^\mu = \dots = p^\mu$$

Le Hamiltonien de feuille d'univers est

$$H = \frac{T}{2}\int_0^\pi \left(\dot{X}^2 + (X')^2\right) = \ell_s^2 p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}\cdot\alpha_n$$

Les générateurs de Virasoro, conservés, sont

$$L_m = 2T\int_0^\pi d\sigma \left(T_{--}\, e^{im(\tau-\sigma)} + T_{++}\, e^{im(\tau+\sigma)}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_{m-n}\,\alpha_n$$

En particulier, $H = L_0$

On a une seule copie de l'algèbre de Virasoro.

Théorie des cordes - exercices : 1. Particule ponctuelle

1. On considère une particule ponctuelle ds un champ électromagnétique

$$S = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{(\dot{x}^\mu)^2}{e} - m^2 e \right) d\tau + q \int A_\mu(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau$$

a) retrouver l'expression de la force de Lorentz

b) calculer le moment canonique π_μ conjugué à x^μ et le Hamiltonien

c) Dans le cas d'un champ constant, $A_\mu(x) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} x^\nu$ déterminer les charges de Noether p_μ associées aux translations et montrer que leur crochet de Poisson satisfait

$$\{ p_\mu, p_\nu \} = -q F_{\mu\nu}$$

2. On considère une particule ponctuelle dans un espace courbe,

$$S = -\frac{1}{2}\int \left(g_{\mu\nu}(x) \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{e} - m^2 e \right) d\tau$$

Montrer que la trajectoire satisfait à l'équation des géodésiques

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \right)$$

pour un choix judicieux de la paramétrisation $s(\tau)$.

Théorie des cordes - exercices : 2. Corde relativiste classique

1. On considère une action $S(g_{\alpha\beta}, \phi^i)$ invariante sous les transformations d'échelle infinitésimales locales

$$\delta g_{\alpha\beta} = 2\Lambda(x)\, g_{\alpha\beta}$$

$$\delta\phi^i = w_i\, \Lambda(x)\, \phi^i \qquad w_i \in \mathbb{R}, \text{ "poids conforme" de } \phi_i$$

Montrer que la trace du tenseur énergie-impulsion est nulle on-shell.

2. On suppose que la dimension X^i de l'espace-cible est compacte de rayon R. La condition de périodicité pour les cordes fermées dans la jauge conforme est donc

$$X^i(\tau, \sigma + 2\pi) = X^i(\tau, \sigma) + 2\pi n R \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Déterminer l'expansion en modes et $L_0, \bar{L}_0$ dans le secteur de nombre d'enroulement n.

3. On considère une corde ouverte avec des conditions de bord "DN", c'est-à-dire Dirichlet à $\sigma = 0$, Neumann à $\sigma = \pi$. Déterminer les modes propres d'oscillation.

4. Montrer que les extrémités d'une corde ouverte avec conditions de Neumann se déplacent à la vitesse de la lumière.

5. On considère une corde fermée générique dans la jauge conforme, $X^\mu(\tau,\sigma) = X^\mu_L(\tau+\sigma) + X^\mu_R(\tau-\sigma)$, que l'on suppose non relativiste (soit $X^0 = \tau$).
Montrer que $\dot{X}^i_L$ et $\dot{X}^i_R$ décrivent deux courbes fermées sur une sphère S^{D-1} de rayon 1.
En déduire qu'en dimension $D=4$, la formation de "cusps", ie de points où $\partial_\sigma X^i // \partial_\tau X^i$, est générique.