Mécanique quantique avancée

2000

Mécanique quantique avancée : TD n^o 1

Introduction mathématique
Octobre 2000

Le but de ce TD est d'établir quelques propriétés très utiles de la gaussienne.

1 Formules de base

1. Vérifier les formules suivantes :

$$
\begin{aligned}
I_1 \equiv \int_R dx \exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right) &= \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,, \\
I_n(A,0) \equiv \int_{R^n} dx_1 \cdots dx_n \exp\left(-\frac{1}{2}\,{}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}\right) &= \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\,,
\end{aligned}
$$

   avec $\mathbf{x}$ un vecteur réel à n composantes et A une matrice réele $n \times n$ symétrique définie positive.

2. Montrer également

$$
I_n(A,\mathbf{b}) \equiv \int_{R^n} dx_1 \cdots dx_n \exp\left(-\frac{1}{2}\,{}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} + {}^t\mathbf{b}\mathbf{x}\right) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\ \exp\left(\frac{1}{2}\,{}^t\mathbf{b}A^{-1}\mathbf{b}\right)\,, \qquad (1)
$$

   où $\mathbf{b}$ est un autre vecteur à n composantes.

3. Montrer que, pour tout vecteur $\mathbf{x}$, la forme quadratique ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ dévient simplement ${}^t\mathbf{x}A_s\mathbf{x}$ avec $A_s = (A + {}^tA)/2$ pour une matrice A quelconque.

2 Utilisation de sources

Montrer que les fonctions de corrélation

$$
\langle x_{k_1} \cdots x_{k_l} \rangle \equiv \int_{R^n} [dx]\, x_{k_1} \cdots x_{k_l}\ \exp\left(-\frac{1}{2}\,{}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}\right)\,, \qquad (2)
$$

avec

$$
[dx] \equiv \frac{dx_1 \cdots dx_n}{\int_{R^n} dx_1 \cdots dx_n \exp\left(-\frac{1}{2}\,{}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}\right)} = \frac{dx_1 \cdots dx_n}{I_n(A,0)} \qquad (3)
$$

la mesure normalisée, peuvent être calculées comme des dérivés de l'intégrale $I_n(A,\mathbf{b})$.

Que vaut $\langle x_{k_1} x_{k_2} \rangle$?

Que vaut $\langle x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_{2\ell+1}} \rangle$?

3 Le théorème de Wick

1. Montrer $\langle x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} x_{k_4} \rangle = {A^{-1}}_{k_1,k_2}\, {A^{-1}}_{k_3,k_4} + {A^{-1}}_{k_1,k_3}\, {A^{-1}}_{k_2,k_4} + {A^{-1}}_{k_1,k_4}\, {A^{-1}}_{k_2,k_3}$.

2. Etablir le résultat plus général qui porte le nom de théorème de Wick :

$$
\begin{aligned}
\langle x_{k_1} \cdots x_{k_l} \rangle &= \sum_{\text{Pairs des } k_i} {A^{-1}}_{k_{p_1},k_{p_2}}\, {A^{-1}}_{k_{p_3},k_{p_4}} \cdots {A^{-1}}_{k_{p_{(l-1)}},k_{p_l}} \\
&= \sum_{\text{Pairs des } k_i} \langle x_{k_{p_1}} x_{k_{p_2}} \rangle \langle x_{k_{p_3}} x_{k_{p_4}} \rangle \cdots \langle x_{k_{p_{(l-1)}}} x_{k_{p_l}} \rangle\,. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

3. Comme une application simple, considérer une gaussienne à une variable et calculer $\langle x^n \rangle$ avec le théorème de Wick et directement.

4 Perturbation

Montrer :

$$\int [dx] \, \exp\left(-\frac{1}{2}\,{}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} - \lambda V(\mathbf{x})\right) = \exp\left(-\lambda V\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}}\right)\right) \left(\exp\left(\frac{1}{2}\,{}^t\mathbf{b}A^{-1}\mathbf{b}\right)\right)\Big|_{\mathbf{b}=\mathbf{0}} \tag{5}$$

avec $V(\mathbf{x}) = V(x_1, \cdots, x_n)$ un polynôme en x_i

5 La transformée de Fourier

On définit la transformée de Fourier d'une fonction $f(x)$ selon

$$\tilde{f}(k) = \int_R dx \, \exp(ikx) \, f(x) \tag{6}$$

1. Montrer que la transformée de Fourier de la convolution de deux fonctions

$$(f * g)(x) \equiv \int_R dy \; g(x-y) f(y) \tag{7}$$

   est simplement $(f \tilde{*} g)(k) = \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)$.

2. Vérifier que la gaussienne est stable par convolution et expliciter sa transformée de Fourier.

6 Une relation utile

Montrer $\ln \det A = \mathrm{Tr} \ln A$ avec A est une matrice diagonalisable.

Mécanique quantique avancée : TD n^o 2
L'oscillateur harmonique par l'intégrale de chemin
Octobre 2000

Le but est de calculer de deux manières les éléments de matrice de l'opérateur d'évolution de l'oscillateur harmonique en dimension 1 : par un calcul "direct", et avec la définition de l'intégrale de chemin.

Soit le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique avec une force extérieure dépendante du temps $f(t)$:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} - qf(t) \; . \tag{8}$$

On a alors, en temps imaginaire,

$$\langle q''|U(t'',t')|q'\rangle = \int_{q(t')=q'}^{q(t'')=q''} \mathcal{D}q \; \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\, S[q]\right) \tag{9}$$

avec l'action Euclidienne

$$S[q] = \int_{t'}^{t''} dt \; \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} - qf(t)\right) \; . \tag{10}$$

7 Première méthode

7.1 Considérations générales

1. Trouver l'équation qui determine la trajectoire classique du mouvement $q_{cl}(t)$ avec les conditiones initiale $q_{cl}(t') = q'$ et finale $q_{cl}(t'') = q''$.

2. Une trajectoire générique $q(t)$ qui joint les points $q(t') = q'$ et $q(t'') = q''$ peut-être écrite comme

$$q(t) = q_{cl}(t) + r(t) \tag{11}$$

   avec $r(t') = r(t'') = 0$.

   L'action (19) est une fonctionnelle quadratique de q. Montrer, de façon générale, que l'action quadratique s'écrit comme une somme de deux fonctionnelles séparées $S_0[q_{cl}]$ et $S_1[r]$.

   Que vaut $S_0[q_{cl}]$?

   Trouver $S_1[r]$ pour l'oscillateur harmonique forcé. Qu'a cette fonctionnelle de particulier ?

3. Le but est de calculer l'élément de matrice (9). Pour ce faire on va extraire la contribution de la trajectoire classique. Montrer

$$\langle q''|U(t'',t')|q'\rangle = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S_0[q_{cl}]\right) \; I \tag{12}$$

   et expliciter I.

4. Quelle type d'intégrale est I ? Donner, de façon générale, le résultat de cette intégrale.

7.2 Résultats pour l'oscillateur harmonique forcé

1. Résoudre l'équation différentielle trouvée en 1.1.2 et déterminer la trajectoire classique si $f(t) = 0$ en dehors de l'intervalle temporel $[t', t'']$.

2. Calculer l'action classique $S[q_{cl}]$ et la mettre sous la forme :

$$
\begin{aligned}
S[q_{cl}] &= \frac{m\omega}{2\sinh(\omega(t''-t'))}\left((q'^2+q''^2)\ \cosh(\omega(t''-t')) - 2q'q''\right) - \int_{t'}^{t''} du\ L(u)f(u) \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{t'}^{t''} dudv\ K(u,v)f(u)f(v)\ . \qquad (13)
\end{aligned}
$$

3. L'élément de matrice (9) pour un problème quadratique s'éxprime en fonction du déterminant de l'operateur quadratique. Calculer ce déterminant pour l'oscillateur harmonique en séparant la contribution divergente indépendante de ω. On utilisera la formule

$$\frac{\sinh x}{x} = \prod_{n>0}\left(1+\left(\frac{x}{\pi n}\right)^2\right)\ . \qquad (14)$$

4. En déduire l'élément de matrice

$$\langle q''|U(t'',t')|q'\rangle = N\sqrt{\frac{\omega(t''-t')}{\sinh(\omega(t''-t'))}}\ \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S[q_c]\right)\ . \qquad (15)$$

5. Lorsque $\omega \to 0$ et $f \to 0$ on doit retrouver le résultat pour une particule libre. Cela nous permet de fixer la constant N. Calculer l'élement de matrice $\langle q''|U(t'',t')|q'\rangle$ pour la particule libre $S[q] = \int_{t'}^{t''} dt\ (m\dot{q}^2)/2$ avec des techniques usuelles de la mécanique quantique et avec l'intégrale de chemin. Trouver la valeur de N.

6. Finalement, déterminer l'expression de l'élément de matrice :

$$\langle q''|U(t'',t')|q'\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar\sinh(\omega(t''-t'))}}\ \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S[q_{cl}]\right)\ . \qquad (16)$$

7. Prouver que l'élément de matrice (9) vérifie l'équation de Schrödinger.

8. Vérifier que si $\omega(t''-t') \ll 1$ et $f(t)$ varie que faiblement dans l'intervalle $[t', t'']$, on retrouve le résultat d'une particule libre couplée à une force externe.

8 Deuxième méthode*

On reprend la formule de définition de l'intégrale fonctionelle. On se limite dans cette partie au cas $f = 0$, pour lequel :

$$\langle q''|U(t'',t')|q'\rangle = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi\epsilon}\right)^{n/2}\int\prod_{k=1}^{n-1} dq_k \exp(-S[q,\epsilon]) \qquad (17)$$

avec

$$S[q,\epsilon] = \sum_{k=1}^{n}\frac{m(q_k-q_{k-1})^2}{2\epsilon} + \frac{m\epsilon\omega^2}{2}\left(\frac{q_k+q_{k-1}}{2}\right)^2\ , \qquad (18)$$

$q_0 = q'$ et $q_n = q''$. On a posé $\hbar = 1$.

1. Posant
$$K^{\alpha,\beta}(q,q') = \exp\left(-\frac{a}{2}(q^2+q'^2)+bqq'\right)$$
et
$$a = \frac{m}{\epsilon}+\frac{m\omega^2\epsilon}{4} \qquad b = \frac{m}{\epsilon}-\frac{m\omega^2\epsilon}{4}\ ,$$
montrer que
$$\langle q''|U(t'',t')|q'\rangle\rangle = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi\epsilon}\right)^{n/2}\int\prod_{j=1}^{n-1}dq_j\ \prod_{k=1}^{n}K^{a,b}(q_k,q_{k-1}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi\epsilon}\right)^{n/2}(K^{a,b})^{*n}(q'',q')\ .$$

2. Calculer $K^{a,b} * K^{a',b'}$.

3. Une paramétrisation utile est :
$$a = \rho\frac{\cosh\theta}{\sinh\theta} \qquad b = \rho\frac{1}{\sinh\theta}$$
avec $\rho > 0$. On notera alors $K^{a,b} \equiv K^{\rho,\theta}$. Montrer
$$\sqrt{\frac{m}{2\pi\epsilon}}K^{\rho,k\theta} * K^{\rho,\theta} = \sqrt{\frac{m\sinh(k\theta)\sinh(\theta)}{\epsilon\rho\sinh((k+1)\theta)}}K^{\rho,(k+1)\theta}\ .$$

4. Conclure en retrouvant l'expression de $\langle q''|U(t'',t')|q'\rangle$ (avec $f=0$) quand $\epsilon\to 0$.

Mécanique quantique avancée : TD n^o 3

La théorie de perturbation

Octobre 2000

Le but de ce TD est de montrer le mécanisme de la théorie de perturbation dans le formalisme de l'intégrale de chemin. Pour l'illustrer, on considère un oscillateur perturbé par un terme anharmonique et on fait un calcul à l'ordre le plus bas. L'action Euclidienne est

$$S[q] = \int_{t'}^{t''} dt \, \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} + V(q) \right) . \tag{19}$$

Dans cette exemple, on prendra :

$$V(q) = \frac{\lambda}{4!} q^4$$

et par commodité $m = \omega = 1$. Soit U_λ l'opérateur d'évolution du problème avec $V \neq 0$, U_f celui de l'oscillateur ($V = 0$) calculé au TD 2 avec une force externe f, et $U_0 = U_{f=0}$.

1. Montrer que :

$$\langle q''|U_\lambda(t'',t')|q'\rangle = \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \int_{t'}^{t''} dt \, V\left(\hbar \frac{\delta}{\delta f(t)} \right) \right] \langle q''|U_f(t'',t')|q'\rangle \Big|_{f=0} \tag{20}$$

2. Puis

$$\begin{aligned} \langle q''|U_\lambda(t'',t')|q'\rangle &= \langle q''|U_0(t'',t')|q'\rangle \\ &\times \left[1 - \frac{\lambda}{4!\hbar} \int_{t'}^{t''} dt \, \left(L^4(t) - 6\hbar K(t,t) L^2(t) + 3\hbar^2 K^2(t,t) \right) + O(\lambda^2) \right] \end{aligned} \tag{21}$$

3. Peut-on retrouver ce résultat après dévélopper l'exponentielle $\exp(\lambda/4!\, q^4)$ et calculer les deux premiers termes $O(\lambda^0)$ et $O(\lambda^1)$ avec la version simple du théorème de Wick montré au TD1 ?

   Aide :

   Calculer

$$\begin{aligned} \langle q^n \rangle &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} dq \, q^n \exp\left(-\frac{aq^2}{2} + bq \right) \\ N &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dq \, \exp\left(-\frac{aq^2}{2} + bq \right) \end{aligned} \tag{22}$$

   pour $n = 1, 2, 3, 4$. Construire le théorème de Wick.

   Calculer $\langle q(t) \rangle$ pour le cas $\lambda = 0$. Dans quels cas ce résultat est nul ? Y a-t-il une symétrie associée ?

   Calculer $\langle q^2(t) \rangle$ et la fonction de corrélation connexe à temps égaux $\langle q^2(t) \rangle - \langle q(t) \rangle^2$ pour le cas $\lambda = 0$.

   Quelle version du théorème de Wick faut-il utiliser dans ce cas ? Conclure.

Mécanique quantique avancée : TD n^o 4
Mécanique quantique et mécanique statistique
Octobre 2000

Le but est d'étudier le rapport entre la mécanique quantique et la mecanique statistique.

9 Fonction de partition de l'oscillateur quantique

La fonction de partition d'un système quantique en contacte avec un rservoir à température T est

$$Z(\beta) = TrU = \int dq \, \langle q|U(\beta\hbar/2, -\beta\hbar/2)|q\rangle \, . \tag{23}$$

1. Calculer $Z(\beta)$ pour l'oscillateur harmonique forcé du TD2, en prenant une force extérieure périodique de période β : $f(t+\beta\hbar) = f(t)$.

2. Retrouver l'expression $Z(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta E_n)$ avec $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$ pour l'oscillateur libre et $E_n = \hbar\omega(n+1/2) - f^2/(2m\omega^2)$ pour l'oscillateur avec une force extérieure constante $f(t) = f$.

3. *Calculer l'énergie libre du cas non forcé $f = 0$.

10 Spin quantique et modèle d'Ising classique

Considerons un spin quantique avec Hamiltonien

$$H = -K\sigma_x \tag{24}$$

avec $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ les matrices de Pauli habituelles :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

1. Calculer l'état fondamental et le premier état excité.

2. Trouver une intégrale de chemin qui répresente l'élement de matrice de l'operateur evolution $\exp(-iHt)$ ($\hbar = 1$) entre deux états propres de σ_z, $|S_a\rangle$ et $|S_b\rangle$. Utiliser un ensemble complet d'états propres de σ_z.

3. Effectuer maintenant le prolongement analytique $t = -i\tau$ et calculer la "matrice de transfer" entre deux états états propres génériques de σ_z au temps $t = k$ et $t = k+1$.

4. Écrire la fonction de partition d'un modèle de Ising classique défini sur un espace unidimensionnel Que peut-on remarquer ?

5. Faire le lien entre les fonctions de corrélations des deux problèmes.

11 Statistique d'une corde classique fermée

Prenons une corde fermée sur un plan à $D = 2$. Nous parametrisons la position le long de la corde avec une coordonnée $0 < \tau < L$ et les “déplacements transverses” par une deuxième coordonnée $X(\tau)$ avec la condition au bord périodique $X(\tau) = X(\tau + L)$.

Posons la corde dans un potentiel extérieur harmonique de façon telle que son énergie a un terme élastique et un terme associé au potentiel extérieur :

$$E = \int_0^L d\tau \left[\frac{M}{2} \left(\frac{dX}{d\tau} \right)^2 + \frac{M\omega_0^2}{2} X^2 \right] \tag{26}$$

1. En utilisant le développement de Fourier de la fonction $X(\tau)$, écrire lénergie (26) en fonction des composants de Fourier X_s.

2. Calculer la fonction de partition et l'énergie libre de la corde.

3. À quoi resemble ce résultat ? Interpreter. Discuter les dimensions des paramètres M et ω_0.

12 Marche au hasard*

Considérons une marche aléatoire sur une droite. Une particule part de 0 à l'instant 0. Trouver sa probabilité de présence en x à l'instant t. Comparer au propagateur libre en temps imaginaire.

Mécanique quantique avancée : TD n^o 5
l'approximation semiclassique et la symétrie O(N)
Novembre 2000

Le but est d'étudier le rôle des symétries dans l'intégrale fonctionnelle avec un exemple simple. Soit un problème générique

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{q}) \tag{27}$$

avec $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_N)$ et $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_N)$ le moment et la coordonnée d'une particule en dimension N.

1. Calculer l'élément de matrice de l'opérateur évolution en utilisant l'approximation semiclassique (approximation de phase stationnaire).

   Comment peut-on tenir compte des corrections quantiques d'ordre supérieur ?

2. Calculer l'intégrale multidimensionnelle

   $$I = \int d^N q \exp\left(\mathbf{q}^2 - \xi(\mathbf{q}^2)^2\right) \tag{28}$$

   en utilisant $\mathbf{q} = \mathbf{q}_{cl} + \sqrt{\hbar}\mathbf{x}$ où $\mathbf{q}_{cl}$ est la configuration "classique" qui minimise "l'action". Combien de configurations classiques y a-t-il ? On choisira une configuration classique non nulle $\mathbf{q}_{cl} \neq 0$. Quel est le résultat de l'intégrale dans cette approximation ?

3. On calculera maintenant l'intégrale de façon plus précise. Quelle est la symétrie de l'action ? Transformer l'intégrale avec un changement de variables suggéré par cette symétrie. Faire maintenant une approximation semiclassique. Comparer avec le résultat de la question 2.

Mécanique quantique avancée : TD n^o 6
L'approximation semiclassique

Novembre 2000

13 Dynamique classique

1. Soit une particule de masse m dans un potentiel $V(x)$. Montrer que l'énergie de la particule est une constante sur la trajectoire classique.

2. Trouver une expression pour l'intervale $t'' - t'$, en fonction de E, pour que la particule aille de (x', t') à (x'', t'') en suivant la trajectoire classique.

3. Montrer que l'action classique est $S[x_{cl}] = -E(t'' - t') + \int_{x'}^{x''} dx \sqrt{2m(E - V(x))}$.

14 Limite semiclassique

On va étudier la dynamique de la particule dans la "limite semiclassique" $\hbar \to 0$.

1. Discuter cette approximation. Pour quels nombres quantiques sera-t-elle justifiée ?

2. Quelle est la trajectoire qui domine l'intégrale de chemin dans cette approximation ? Justifier.

3. Écrire l'action d'une trajectoire $x_{cl} + \delta x$, avec $\delta x(t'') = \delta x(t') = 0$, jusqu'à l'ordre quadratique en δx.

4. Écrire le propagateur $U(x'', t''; x', t')$ à ce même ordre. Comparer avec l'oscillateur harmonique usuel. Si le potentiel est $V(x) = V_0 + mgx + m\omega^2 x^2/2$, que peut-on dire de cette approximation ?

5. Quel est le determinant qu'il faut calculer pour trouver U si $V(x)$ est générique ?

6. Pour calculer le determinant, on diagonalise l'opérateur avec un changement de variables astusieux. Les détails du calcul se trouvent en S. Coleman, en *The whys of subnuclear physics*, ed. A. Zichichi (Plenum, NY, 1979) p. 805; R. Rajaraman, Phys. Rep. **21**C, 227 (1975). On trouve

$$U(x'', t''; x', t') = \frac{\exp\left(i \int_{t'}^{t''} dx k(x) - i\frac{E}{\hbar}(t'' - t')\right)}{\sqrt{2\pi i k(x'')k(x') \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{(k(x))^3}}} \tag{29}$$

avec le moment $k(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}/\hbar$.

7. Comparer l'approximation semi-classique avec la théorie de perturbations .

8. Partons maintenant de l'équation de Schrödinger. Écrire les fonctiones d'onde $\psi_{WKB}(x)$, dans les régions accessibles classiquement, en prenant la limite semiclassique.

9. Vérifier que le propagateur (29) peut-être aussi obtenu avec l'approximation WKB usuelle.*
(Aide : commencer par inserer un ensemble complet de fonctiones propres de l'énergie dans la définition de U, approximer les fonctiones propres de l'énergie dans la limite semiclassique ...)

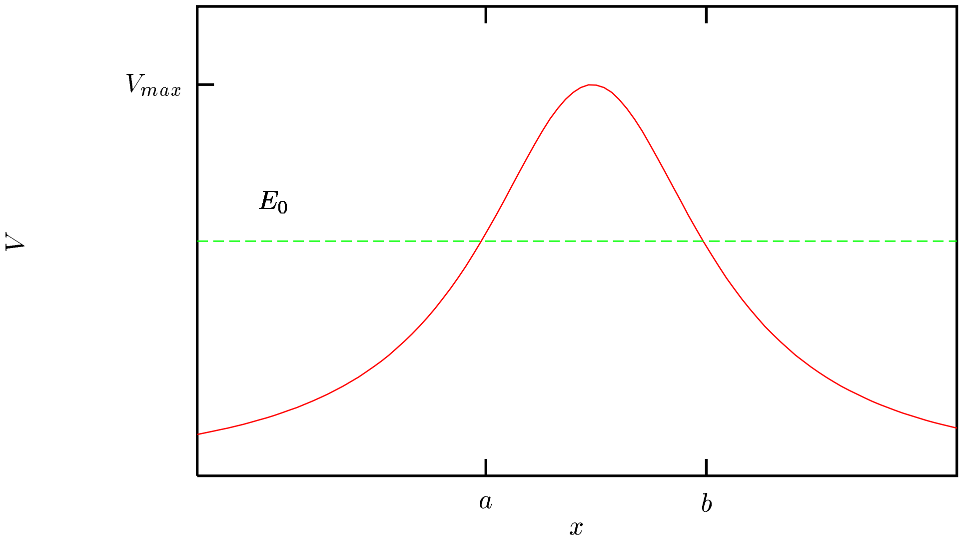

Figure 1: Barriỉe unidimensionnelle. La particule s'approche de la barrière du côté gauche, avec une énergie $E_o < V_{max}$. Les points de retournement classiques sont a et b.

14.1 Penetration d'une barrière

Nous allons maintenant étudier, à l'aide du propagateur (29), la probabilité pour que la particule passe à travers une barrière comme celle de la figure 1.

1. Montrer qu'une fonction d'onde WKB est propagée dans une autre function d'onde WKB avec (29). On suppose que le propagateur (29) peut être continué analytiquement dans les régiones interdites classiquement.

2. Si la particule incidente est localisée pret de x_1 au temps t_1, elle est décrite par le paquet d'ondes
$$\psi(x, t_1) = \int_0^\infty \phi(E)\, \psi_{WKB}(x, x_1, E) \tag{30}$$
où
$$\psi_{WKB}(x, x_1, E) = [k(x)]^{-1/2} \exp\left(i \int_{x_1}^{x} dy k(y) \right) . \tag{31}$$
Le poids $\phi(E)$ est concentré au tours de $0 \ll E_o \ll V_{max}$ et $\phi(E) = 0$, si $E > V_{max}$.

3. Comment peut-on calculer l'evolution temporel du paquet d'ondes ?

4. Quelle est la probabilité de transmision à travers la barrière ? Comment se compare ce résultat avec le résultat WKB ? En quoi est ce calcul plus simple ?

5. Interpréter le mouvement dans la région interdite classiquement comme un mouvement qui a lieu en temps complexe.