Magistère Interuniversitaire de Physique
Examen de Mécanique Quantique Avancée
7 Décembre 1999

Avertissement : la clarté et la précision des calculs ainsi que les explications fournies seront des éléments importants dans la notation. L'utilisation des notes de cours est admise à l'examen.

L'examen est constitué de quatre exercices (trois indépendants) et d'un problème.

1. Soient deux variables aléatoires x, y corrélées dont on suppose la loi de probabilité gaussienne. On trouve les cinq valeurs moyennes suivantes

$$\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0\,, \quad \langle x^2 \rangle = 3\,, \quad \langle xy \rangle = 1\,, \quad \langle y^2 \rangle = 2\,.$$

En déduire les valeurs moyennes $\langle x^4 \rangle$, $\langle x^3 y \rangle$, $\langle x^2 y^2 \rangle$, $\langle x y^3 \rangle$, $\langle y^4 \rangle$.
Quelle est la distribution gaussienne qui conduit à ces valeurs?

2. Évaluer par la méthode du col l'intégrale suivante

$$I_n(\alpha) = \int_0^1 \mathrm{d}x\, x^{\alpha n} (1-x)^{\beta n},$$

avec $\beta = 1 - \alpha$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, dans la limite $n \to \infty$.

3. Utiliser le formalisme d'intégrale sur les variables de Grassmann pour obtenir un développement en puissances de λ jusqu'à l'ordre λ^3 inclus du déterminant $\det(M+\lambda)$ où la matrice M est inversible. On notera $X = M^{-1}$. Il est suggéré d'utiliser le théorème de Wick.

4. Généraliser au développement de $\det(M + \Lambda)$, où Λ est une matrice diagonale $\Lambda_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, en puissances des λ_i

Problème. Soit le hamiltonien H

$$H = \tfrac{1}{2} p^2 + \tfrac{1}{2} q^2 (1 - \lambda q)^2.$$

On s'intéresse au fondamental et au premier état excité de H quand le paramètre λ tend vers zéro.

1. Calculer jusqu'à l'ordre λ^2 inclus l'énergie de l'état fondamental par la méthode de l'intégrale de chemin.

2. Montrer que l'hamiltonien admet une symétrie de réflexion d'espace. Soit P l'opérateur correspondant. Puisque

$$[P, H] = 0\,,$$

ces deux opeŕateurs peuvent être diagonalisés simultanément. Puisque $P^2 = \mathbf{1}$, les fonctions propres $\psi(q)$ de H satisfont

$$P\psi = \pm\psi \,.$$

Pour la suite on suggère de poser

$$\lambda q = \tfrac{1}{2} + x \,.$$

3. Écrire le hamiltonien transformé et l'intégrale de chemin correspondant à la fonction de partition $\mathcal{Z}(\beta)$. Montrer que seule la combinaison $\lambda^2\hbar$ apparaît. On posera alors $\hbar = 1$.

4. Écrire les éléments de matrice de P dans la base où l'opérateur de position $\hat{x}$ est diagonal. En déduire l'intégrale de chemin contribuant à $\operatorname{tr} P\mathrm{e}^{-\beta H}$ (le problème est lié aux conditions aux limites).

5. Montrer que les opérateurs $Q_\pm$

$$Q_\pm = \tfrac{1}{2}(\mathbf{1} \pm P),$$

sont des projecteurs. Que peut-on dire des états propres contribuant aux deux quantités $\mathcal{Z}_\pm(\beta)$

$$\mathcal{Z}_\pm(\beta) = \operatorname{tr} Q_\pm \mathrm{e}^{-\beta H} \,.$$

6. Par la suite on ne s'intéresse qu'à la limite $\beta \to \infty$.
Que peut-on dire des contributions dominantes à l'intégrale de chemin pour $\lambda \to 0$ et $\beta \to \infty$ dans le cas de

$$\mathcal{Z}(\beta) = \mathcal{Z}_+(\beta) + \mathcal{Z}_-(\beta),$$

et de

$$\operatorname{tr} P\mathrm{e}^{-\beta H} = \mathcal{Z}_+(\beta) - \mathcal{Z}_-(\beta)$$

respectivement.
Utilisant la méthode du col qui conduit à résoudre l'équation du mouvement classique, calculer la contribution dominante à l'intégrale de chemin donnant $\operatorname{tr} P\mathrm{e}^{-\beta H}$. On n'oubliera pas la condition d'action finie.

7. On admettra que dans la limite $\lambda \to 0$, $\beta \to \infty$, les contributions de deux états $\psi_\pm$

$$P\psi_\pm = \pm\psi_\pm \,,$$

survivent, d'énergies $E_\pm$ respectivement. Posant

$$E_\pm = E_{\text{pert.}} \pm E_{\text{inst.}} \,, \quad |E_{\text{inst.}}| \ll E_{\text{pert.}},$$

identifier $E_{\text{inst.}}$.